



Профиль: математика.

Вариант: 1

Класс: 8

Задача 1 (15 баллов). Решите уравнение $\sqrt{\frac{-x+4-\frac{4}{x}}{2x^2-6-x}} = \frac{1}{7\sqrt{-x}}$.

Задача 2 (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2-x+a-a^2}{x-2}=0$ имеет два различных решения?

Задача 3 (15 баллов). В прямоугольном треугольнике с острым углом, равным 45° , прямая, параллельная гипотенузе, отсекает от треугольника равнобедренную трапецию, которая делится своими диагоналями на четыре равнобедренных треугольника. Найдите угол между диагоналями трапеции.

Задача 4 (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение $|x-2|+|2x+2|=a$ имеет нечетное количество решений?

Задача 5 (20 баллов). В равнобедренной трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, AD больше BC , на стороне DC взяли точку M и провели через нее прямую, параллельную AB , до пересечения с AD в точке N так, что $CM : AN = 2 : 3$. Площадь полученного отсеченного треугольника DMN оказалась равной $8\sqrt{2}$. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 5$ и $BM = AN$.

Задача 6 (20 баллов). В ящике находятся катушки индуктивности двух типов - первый тип содержит 250 витков, а второй 500 витков. Остальные параметры катушек одинаковы. Для изготовления одной катушки на цилиндрический каркас массой 200 г, имеющий диаметр $D = 20$ мм и длину $L = 50$ мм плотно, виток к витку, в несколько слоев наматывают медную проволоку диаметром $d = 1$ мм. Стоимость катушки с намотанной проволокой первого типа составляет 4000 рублей, а второго 6000 рублей. Если округлить массу каждой катушки с намотанной проволокой в граммах до десятков, то общий вес изделий будет равен 9180 граммов. Определите максимальную и минимальную стоимость находящихся в ящике изделий. Считать, что плотность меди равна 10^{-2} г/мм³ и число $\pi = 3$.

(Справочные данные: объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi r h$, где r - радиус основания, h - высота цилиндра).



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика

Предмет: Математика

Класс: 8

Задание 1 (максимальная оценка 15 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Полное, обоснованное решение	15
Найдена одз, раскрыты модули; допущена ошибка уже при решении квадратных уравнений.	10
Решение без учета одз и (или) неверная работа с модулями.	5
Решение не соответствует перечисленным выше критериям	0

Задание 2 (максимальная оценка 15 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Полное обоснованное решение	15
Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.	12
Рассмотрены два случая из трех.	10
Рассмотрен только случай $D=0$	5
Неверные рассуждения или записан только ответ.	0

Задание 3 (максимальная оценка 15 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Полное обоснованное решение	15
Рассмотрены только два случая, они доведены до верного ответа или рассмотрены три случая, но допущена вычислительная ошибка. Или рассмотрены все три случая, но не доказано, что $BO=OC$; $AO=OD$.	10
Рассмотрен только один случай или допущены вычислительные ошибки при рассмотрении двух случаев.	5
Решение не соответствует перечисленным выше критериям	0

Задание 4 (максимальная оценка 15 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Полное, обоснованное решение	15
Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка на последнем этапе.	12
При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи.	10
Частично верно «раскрыт» модуль или другое верное начало решения, нет продолжения.	5
Решение не соответствует перечисленным выше критериям	0

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Решение верно.	20
Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна арифметическая ошибка или найдены все стороны трапеции, но задача не доведена до конца.	15
Доказано равенство углов и подобие треугольников.	10
Доказано одно из утверждений, ведущих к решению задачи.	5
Решение не верно или отсутствует	0

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Полное обоснованное решение.	20
Получена функция для определения наименьшего и наибольшего значения стоимости и общей массы изделий, дальнейшее решение с ошибкой или отсутствует.	15
Получена функция для определения наименьшего и наибольшего значения стоимости ИЛИ общей массы изделий, дальнейшее решение с ошибкой или отсутствует.	10
Имеются продвижения в решении, верно найдены некоторые промежуточные результаты.	5
Решение не верно или отсутствует.	0

Задача 1 (15 баллов). Решите уравнение $\sqrt{\frac{-x+4-\frac{4}{x}}{2x^2-6-x}} = \frac{1}{7\sqrt{-x}}$.

Решение.

ОДЗ: $x < 0, x \neq -\frac{3}{2}$

$$7\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |2x^2 - x - 6|;$$

$7|x - 2| = |2x^2 - x - 6|; 7x - 14 = 2x^2 - x - 6; 14 - 7x = 2x^2 - x - 6;$ с учетом ОДЗ $x = -5$.

Ответ: $x = -5$.

Баллы	Критерии
15	Полное, обоснованное решение
10	Найдена одз, раскрыты модули; допущена ошибка уже при решении квадратных уравнений.
5	Решение без учета одз и (или) неверная работа с модулями.

Задача 2 (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2 - x + a - a^2}{x - 2} = 0$

имеет два различных решения?

Решение.

Найдем корни числителя, $D = 1 - 4(a - a^2) = (2a - 1)^2$, $x_1 = a$, $x_2 = 1 - a$.

- 1) $x_1 = x_2$ при $a = 1 - a$, $a = 0,5$.
- 2) $x_1 = 2$ при $a = 2$.
- 3) $x_2 = 2$ при $1 - a = 2$, $a = -1$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0,5) \cup (0,5; 2) \cup (2; +\infty)$

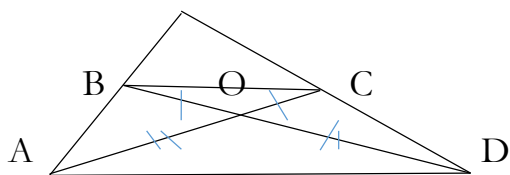
Баллы	Критерии
15	Полное обоснованное решение
12	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.
10	Рассмотрены два случая из трех.
5	Рассмотрен только случай $D = 0$.
0	Неверные рассуждения или записан только ответ.

Задача 3 (15 баллов). В прямоугольном треугольнике с острым углом, равным 45° , прямая, параллельная гипотенузе, отсекает от треугольника равнобедренную трапецию,

которая делится своими диагоналями на четыре равнобедренных треугольника. Найдите угол между диагоналями трапеции.

Решение.

Пусть углы $\angle BAO, \angle BOA, \angle COD, \angle CDO$ равны α . Тогда $\angle OAD = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2}$; $\angle BAD = 45^\circ = \alpha + \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2}$; $\alpha = 30^\circ$



Пусть углы $\angle BAO, \angle BOA, \angle COD, \angle CDO$ равны α . Тогда $\angle OAD = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2}$; $\angle BAD = 45^\circ = \alpha + \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2}$; $\alpha = 30^\circ$

Рассмотрим другой вариант: пусть углы $\angle ABO, \angle AOB, \angle DOC, \angle DCO$ равны β . Тогда $\angle BAD = 45^\circ = 180^\circ - 2\beta + \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2}$; $\beta = 90^\circ$, что невозможно.

Рассмотрим третий вариант: пусть углы $\angle BAO, \angle ABO, \angle OCD, \angle ODC$ равны γ . $\angle BAD = \gamma + \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 45^\circ$; $90^\circ = 45^\circ$ невозможно.

Замечание: должно быть доказано, что $BO=OC$; $AO=OD$ и поэтому никаких других случаев нет.

Ответ: 30° или 150°

Рассмотрим другой вариант: пусть углы $\angle ABO, \angle AOB, \angle DOC, \angle DCO$ равны β . Тогда $\angle BAD = 45^\circ = 180^\circ - 2\beta + \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2}$; $\beta = 90^\circ$, что невозможно.

Рассмотрим третий вариант: пусть углы $\angle BAO, \angle ABO, \angle OCD, \angle ODC$ равны γ . $\angle BAD = \gamma + \frac{180^\circ - 2\gamma}{2} = 45^\circ$; $90^\circ = 45^\circ$ невозможно.

Замечание: должно быть доказано, что $BO=OC$; $AO=OD$ и поэтому никаких других случаев нет.

Ответ: 30° или 150°

Баллы	Критерии
15	Полное обоснованное решение
10	Рассмотрены только два случая, они доведены до верного ответа или рассмотрены три случая, но допущена вычислительная ошибка. Или рассмотрены все три случая, но не доказано, что $BO=OC$; $AO=OD$.
5	Рассмотрен только один случай или допущены вычислительные ошибки при рассмотрении двух случаев.
0	Решение не соответствует перечисленным выше критериям

Задача 4 (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение $|x-2+|2x+2||=a$ имеет нечетное количество решений?

Решение.

Построим график $f(x) = |x-2+|2x+2||$.

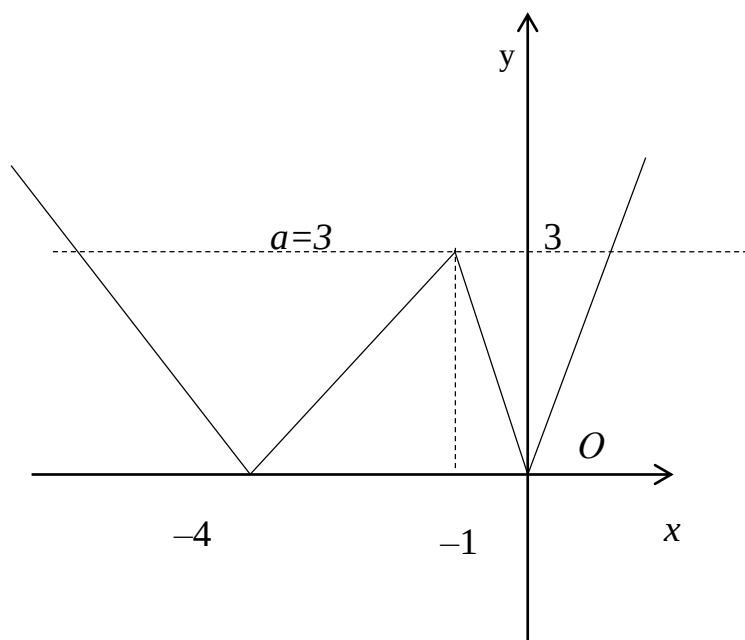
При $x < -1$ $f(x) = |x-2+2x+2| = |3x|$,

при $x \geq -1$ $f(x) = |x-2-2x-2| = |-x-4| = |x+4|$, поэтому получаем

при $x < -4$ $f(x) = -x-4$, при $-4 \leq x < -1$ $f(x) = x+4$,

при $-1 \leq x < 0$ $f(x) = -3x$,

при $0 \leq x$ $f(x) = 3x$.



При $a = 3$ три решения, при остальных значениях параметра решений два или четыре или нет решений.

Ответ: $a = 3$

Баллы	Критерии
15	Полное, обоснованное решение
12	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка на последнем этапе.
10	При любом верном ходе решения решена значительная часть задачи.

5	Частично верно «раскрыт» модуль или другое верное начало решения, нет продолжения.
0	Решение не соответствует перечисленным выше критериям

Задача 5 (20 баллов). В равнобедренной трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, AD больше BC , на стороне DC взяли точку M и провели через нее прямую, параллельную AB , до пересечения с AD в точке N так, что $CM : AN = 2 : 3$. Площадь полученного отсеченного треугольника DMN оказалась равной $8\sqrt{2}$. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 5$ и $BM = AN$.

Решение.

Пусть $\angle BAD = \alpha \Rightarrow \angle MND = \alpha$

(соответственные) $\angle MDN = \alpha$

(равнобедренная трапеция),

аналогично $ABMN$ тоже

равнобедренная трапеция и

$\angle ABM = \alpha$.

Проведем

$ML \parallel AD \Rightarrow \angle BLM = \angle BAD = \alpha$

(соответственные)

$\Rightarrow \square BML \square \square NMD$ (по двум углам)

$$\Rightarrow \frac{MN}{ND} = \frac{BM}{BL} = \frac{AN}{CM} = \frac{3}{2}.$$

Используя это и введя коэффициент пропорциональности y , составим

Уравнение для площади:

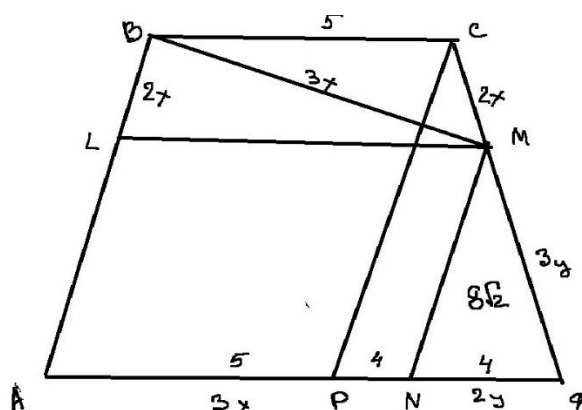
$$S_{\square MND} = \frac{1}{2} 2y \cdot \sqrt{9y^2 - y^2} = y^2 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow AL = MD = 6, ND = 4$$

Проведем $CP \parallel AB \Rightarrow AP = BC = 5 \Rightarrow PN = 3x - 5$. И используя т. Фалеса,

$$\text{запишем соотношение: } \frac{DM}{MC} = \frac{DN}{NP} \Rightarrow \frac{6}{2x} = \frac{4}{3x-5} \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Стороны трапеции найдены, а значит и ее площадь: } S = \frac{5+13}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$$

Ответ: $72\sqrt{2}$.



Баллы	Критерии
20	Решение верно.
15	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна арифметическая ошибка или найдены все стороны трапеции, но задача не доведена до конца.
10	Доказано равенство углов и подобие треугольников.
5	Доказано одно из утверждений, ведущих к решению задачи.

Задача 6 (20 баллов). В ящике находятся катушки индуктивности двух типов - первый тип содержит 250 витков, а второй 500 витков. Остальные параметры катушек одинаковы. Для изготовления одной катушки на цилиндрический каркас массой 200 г, имеющий диаметр $D = 20$ мм и длину $L = 50$ мм плотно, виток к витку, в несколько слоев наматывают медную проволоку диаметром $d = 1$ мм. Стоимость катушки с намотанной проволокой первого типа составляет 4000 рублей, а второго 6000 рублей. Если округлить массу каждой катушки с намотанной проволокой в граммах до десятков, то общий вес изделий будет равен 9180 граммов. Определите максимальную и минимальную стоимость находящихся в ящике изделий. Считать, что плотность меди равна 10^{-2} г/мм³ и число $\pi = 3$.

(Справочные данные: объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi r h$, где r - радиус основания, h - высота цилиндра).

Ответ: $P_{\text{наим.}} = 102000$ руб., $P_{\text{наиб.}} = 108000$ руб.

Решение:

Рассмотрим катушки первого типа. Один слой будет содержать

$50 : 1 = 50$ витков, поэтому потребуется $250 : 50 = 5$ слоев. С каждым слоем диаметр (и радиус) витка увеличивается, радиус витков в первом слое: $R_1 = 10,5$ мм, во втором слое: $R_2 = 11,5$ мм, ..., $R_5 = 14,5$ мм.

Суммарная длина витков k -го слоя:

$$l_k = 2\pi R_k 50 = 100\pi R_k$$

Тогда длина провода:

$$l = l_1 + l_2 + \dots + l_5 = 100\pi(R_1 + \dots + R_5) = 6250\pi$$

Объем провода:

$$V_1 = \pi d^2 l / 4 = 14062,5 \text{ мм}^3$$

Масса провода:

$$m_1 = \rho V_1 = 140,625 \text{ г}$$

Масса всей катушки:

$$m = 340,625 \text{ г} \approx 340 \text{ г}$$

Аналогично для второй катушки:

$$L = l_1 + \dots + l_{10} = 15000\pi$$

Объем провода:

$$V_2 = \pi d^2 L / 4 = 33750 \text{ мм}^3$$

Масса провода:

$$M_1 = \rho V_2 = 337,5 \text{ г}$$

Масса всей катушки:

$$M = 537,5 \text{ г} \approx 540 \text{ г}$$

Из условия задачи (x маленьких катушек, y больших катушек):

$$340x + 540y = 9180$$

Стоимость изделий определяется соотношением:

$$P(x, y) = 4000x + 6000y$$

Тогда $P(x) = 2000x/9 + 6000 \cdot 9180/540$

Это возрастающая по x функция, поэтому минимум достигается при $x = 0$ ($y = 17$). А максимум при $x = 27$ ($y = 0$).

Приведем другое рассуждение:

$$340x + 540y = 9180$$

$$17x + 27y = 27 \cdot 17$$

$$17x = 27(17 - y)$$

Тогда $y = 17 - 17k$, $x = 27k$, $k \in \mathbb{Z}$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Уравнение имеет два решения: $(0; 17)$ и $(27; 0)$, при одном из них прибыль максимальна, при другом - минимальна.

$P = P_{\max}$, если $y = 0$, $x = 27$, $P_{\max} = 4000 \cdot 27 = 108000$ руб

$P = P_{\min}$, если $x = 0$, $y = 17$, $P_{\min} = 6000 \cdot 17 = 102000$ руб

Ответ: $P_{\min} = 102000$ руб, $P_{\max} = 108000$ руб

Баллы	Критерии
20	Полное обоснованное решение.
15	Получена функция для определения наименьшего и наибольшего значения стоимости и общей массы изделий, дальнейшее решение с ошибкой или отсутствует.
10	Получена функция для определения наименьшего и наибольшего значения стоимости ИЛИ общей массы изделий, дальнейшее решение с ошибкой или отсутствует.
5	Имеются продвижения в решении, верно найдены некоторые промежуточные результаты.
0	Решение не верно или отсутствует.