



Профиль: математика

Вариант: 3

Класс: 11

Задача 1 (12 баллов). Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geq 2$. С каким остатком число 3 в степени a_{2022} делится на 13?

Задача 2 (16 баллов). Известно, что графики функций $f(x) = x^p$ и $g(x) = \ln x$ касаются (имеют общую точку, в которой касательные к обоим графикам совпадают). Найдите константу p и точку касания.

Задача 3 (16 баллов). Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O , причем $AO:OA_1 = 2:1$. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке C_1 . Найдите угол $B_1A_1C_1$ и длину отрезка A_1C_1 , если $AB = 2$, $AC = 4$.

Задача 4 (16 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\log_{\sqrt{a/10}} \left(\frac{a + 8x - x^2}{20} \right) \geq 2$ имеет хотя бы одно решение $x \geq 2$, и каждое такое решение является также решением уравнения $|a + 2x - 16| + |a - 2x + 9| = |2a - 7|$.

Задача 5 (20 баллов). Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SAB CDEF$ плоскостью, проходящей через вершину C основания $ABCDEF$ и параллельной медиане BM боковой грани SAB и апофеме SN боковой грани SAF , если сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 1.

Задача 6 (20 баллов). Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом.

Пусть автомат установлен на льду на расстоянии $l = 12$ м от ворот. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот, с некоторой фиксированной начальной скоростью выброса шайбы V_0 и под различными углами α к поверхности льда. Примем точку выброса за начало отсчета системы координат. Ось абсцис направим перпендикулярно центральной линии хоккейной площадки в сторону ворот. Ось ординат – вверх, перпендикулярно поверхности льда. В распоряжении вратаря имеется ловушка для шайб, изображенная на рисунке точкой M . Траектория движения шайбы, находящейся в воздухе и рассматриваемой как материальная точка, в зависимости от времени t в указанной системе координат описывается уравнениями:



$$\begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha, \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases} \text{ Определите диапазон возможных значений квадрата начальной скорости}$$

выброса шайбы, при каждом из которых шайба попадает в ловушку и максимально возможная высота ловушки в моменты захвата шайбы не превосходит 1 м. Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Правила выставления баллов за выполнение заданий

№	Критерии оценивания задания	Баллы
1.	Последовательности	0, 3, 6, 9, 12
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Доказана периодичность деления 3^n на 13.	3
	Доказана периодичность деления 3^n на 13 и периодичность остатков при делении чисел Фибоначчи на 3.	6
	При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	9
	Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	12
2.	Производные	0, 4, 8, 12, 16
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Правильно вычислены производные функций, записано их равенство.	4
	Составлена система уравнений, выражена одна переменная через другую (x через p или p через x).	8
	При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	12
	Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16
3.	Планиметрия	0, 4, 8, 12, 16
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Доказано, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.	4
	Доказано, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, верно найдена длина отрезка A_1B_1 или B_1C_1 .	8
	При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	12
	Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16
4.	Система с параметром	0, 4, 8, 12, 16
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Для неравенства выписаны все необходимые ограничения и проведено потенцирование, для уравнения получено эквивалентное неравенство.	4
	С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	8

	С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	12
	Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	16
5.	Стереометрия	0, 5, 10, 15, 20
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Верно построено сечение с описанием построения и частично найдены отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды.	5
	Верно найдена площадь проекции сечения на плоскость основания или косинус угла между плоскостью сечения и основанием, при этом верно построено сечение с описанием построения и найдены все отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды.	10
	При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	15
	Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20
6.	Ситуационная задача	0, 5, 10, 15, 20
	Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
	Верно описана математическая модель, получены необходимые соотношения.	5
	Найдена верно одна из границ диапазона.	10
	При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	15
	Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20

Решение варианта №3 (Математика - 11 класс)

1. Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n \geq 2$. С каким остатком число 3 в степени a_{2022} делится на 13? (12 баллов)

Решение. Чтобы найти остаток при делении 3^n на 13, достаточно знать остаток при делении n на 3, потому что

$$3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13} \implies 3^{3k+r} \equiv 3^r \pmod{13}.$$

По индукции доказывается, что остатки при делении чисел Фибоначчи на 3 повторяются с периодом 8:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
$a_k \pmod{3}$	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	...

Поскольку 2022 делится на 8 с остатком 6, имеем

$$3^{a_{2022}} \equiv 3^{a_6} = 3^8 \equiv 3^2 = 9 \pmod{13}.$$

Ответ: 9.

2. Известно, что графики функций $f(x) = x^p$ и $g(x) = \ln x$ касаются (имеют общую точку, в которой касательные к обоим графикам совпадают). Найдите константу p и точку касания. (16 баллов)

Решение. Поскольку графики имеют общую касательную, то для абсциссы точки касания выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} x^p = \ln x \\ px^{p-1} = 1/x \end{cases} \implies \begin{cases} x^p = \ln x \\ x^p = 1/p \end{cases} \implies \ln x = \frac{1}{p} \implies x = e^{1/p}, \quad x^p = e = \ln x.$$

Таким образом, $x = e^e$, $p = \frac{1}{e}$, $y = e$.

Ответ: $p = \frac{1}{e}$, точка касания $(e^e; e)$.

3. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O , причем $AO:OA_1 = 2:1$. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке C_1 . Найдите угол $B_1A_1C_1$ и длину отрезка A_1C_1 , если $AB = 2, AC = 4$. (16 баллов)

Решение.

$$a = BC, b = AC = 4, c = AB = 2,$$

$$AO:OA_1 = 2:1.$$

1) По свойствам биссектрис имеем

$$AB:BA_1 = AO:OA_1 = 2:1, BA_1 = \frac{c}{2},$$

$$AC:CA_1 = AO:OA_1 = 2:1, CA_1 = \frac{b}{2},$$

$$BC = \frac{b+c}{2} = 3.$$

2) Докажем, что $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{a}{b}$. Для площадей

треугольников AC_1C и BC_1C имеем соотношения

$$\frac{S_{AC_1C}}{S_{BC_1C}} = \frac{BC_1}{AC_1},$$

$$S_{AC_1C} = b \cdot C_1E, S_{BC_1C} = a \cdot C_1D,$$

$C_1E = C_1D$. Отрезки C_1E и C_1D – высоты треугольников AC_1C и BC_1C . Поскольку CC_1 – биссектриса угла DCE , то прямоугольные треугольники CC_1D и CC_1E равны, и $C_1E = C_1D$.

Следовательно, $\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{a}{b}$. По свойствам биссектрис $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b}, \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{c}{a}$. Тогда $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{c}{b} \cdot$

$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$. По теореме Менелая точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. $\angle B_1A_1C_1 = 180^\circ$,

$$B_1C_1 = B_1A_1 + A_1C_1.$$

$$3) \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}, AB_1 = \frac{8}{5}, CB_1 = \frac{12}{5}; CA_1 = 2; \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{3}{4}, \frac{BC_1}{2+BC_1} = \frac{3}{4}, BC_1 = 6, AC_1 = 8.$$

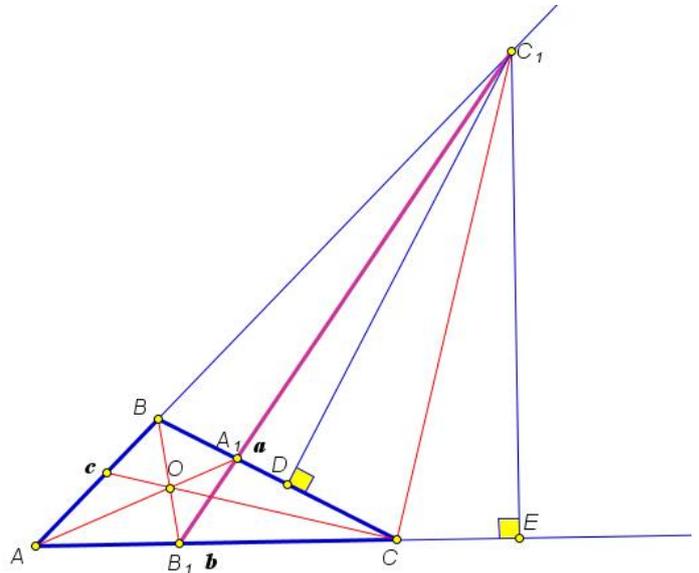
$$\alpha = \angle BAC, \cos \alpha = \frac{4+16-9}{16} = \frac{11}{16}, \gamma = \angle ACB, \cos \gamma = \frac{9+16-4}{24} = \frac{7}{8}.$$

$$4) C_1B_1^2 = AC_1^2 + AB_1^2 - 2AC_1 \cdot AB_1 \cos \alpha = 64 + \frac{64}{25} - 2 \cdot \frac{64}{5} \cdot \frac{11}{16} = \frac{1224}{25}, C_1B_1 = \frac{6\sqrt{34}}{5}.$$

$$A_1B_1^2 = CA_1^2 + CB_1^2 - 2CA_1 \cdot CB_1 \cos \gamma = 4 + \frac{144}{25} - 2 \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{34}{25}, A_1B_1 = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

$$A_1C_1 = B_1C_1 - A_1B_1 = \sqrt{34}.$$

Ответ: $180^\circ, \sqrt{34}$.



4. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\log_{\sqrt{a/10}} \left(\frac{a+8x-x^2}{20} \right) \geq 2$

имеет хотя бы одно решение $x \geq 2$, и каждое решение неравенства также является решением уравнения $|a+2x-16|+|a-2x+9|=|2a-7|$. (16 баллов)

Решение:

$$\log_{\sqrt{a/10}} \left(\frac{a+8x-x^2}{20} \right) \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+8x-x^2 > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 10, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\sqrt{a/10} - 1 \right) \left(\frac{a+8x-x^2}{20} - \frac{a}{10} \right) \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > x^2 - 8x, \\ a > 0, \\ a \neq 10, \end{array} \right. \quad \text{В системе } Oxa \quad \left(a-10 \right) \left(8x-x^2-a \right) \geq 0.$$

изобразим множество решений данной системы. Это области на рисунке, окрашенные голубым и зеленым цветом. Рассмотрим уравнение $|a+2x-16|+|a-2x+9|=|2a-7|$.

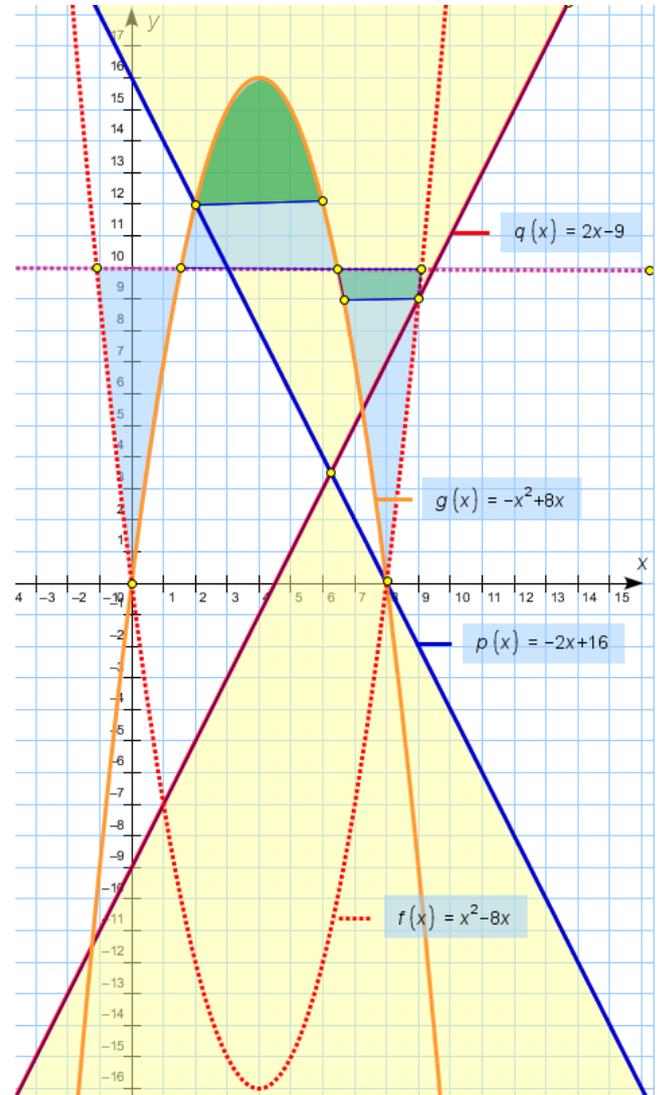
Обозначим $u = a+2x-16$, $v = a-2x+9$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид $|u|+|v|=|u+v|$. Решениями последнего уравнения являются все u и v такие, что $uv \geq 0$, или $(a+2x-16)(a-2x+9) \geq 0$. В системе Oxa

множеством решений последнего неравенства является область между двумя прямыми $a+2x-16=0$ и $a-2x+9=0$, окрашенная на рисунке желтым цветом.

Каждое решение $x \geq 2$ неравенства $\log_{\sqrt{a/10}} \left(\frac{a+8x-x^2}{20} \right) \geq 2$ является решением уравнения

$$|a+2x-16|+|a-2x+9|=|2a-7| \text{ при } a \in [9; 10) \cup [12; 16].$$

Ответ: $a \in [9; 10) \cup [12; 16]$.



5. Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершину C основания $ABCDEF$ и параллельной медиане BM боковой грани SAB и апофеме SN боковой грани SAF , если сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 1. (20 баллов)

Решение. Построим сечение пирамиды. В плоскости SAF через точку M проведем прямую MQ , параллельную SN , Q принадлежит прямой AF , MQ – средняя линия треугольника SAN , $AF = a$, $AQ = QN = \frac{a}{4}$, где a – сторона основания пирамиды.

Плоскость SQB параллельна плоскости сечения. Через точку C проведем прямую CP , параллельную BQ , точка P принадлежит ребру FE и является точкой пересечения этого ребра с плоскостью сечения.

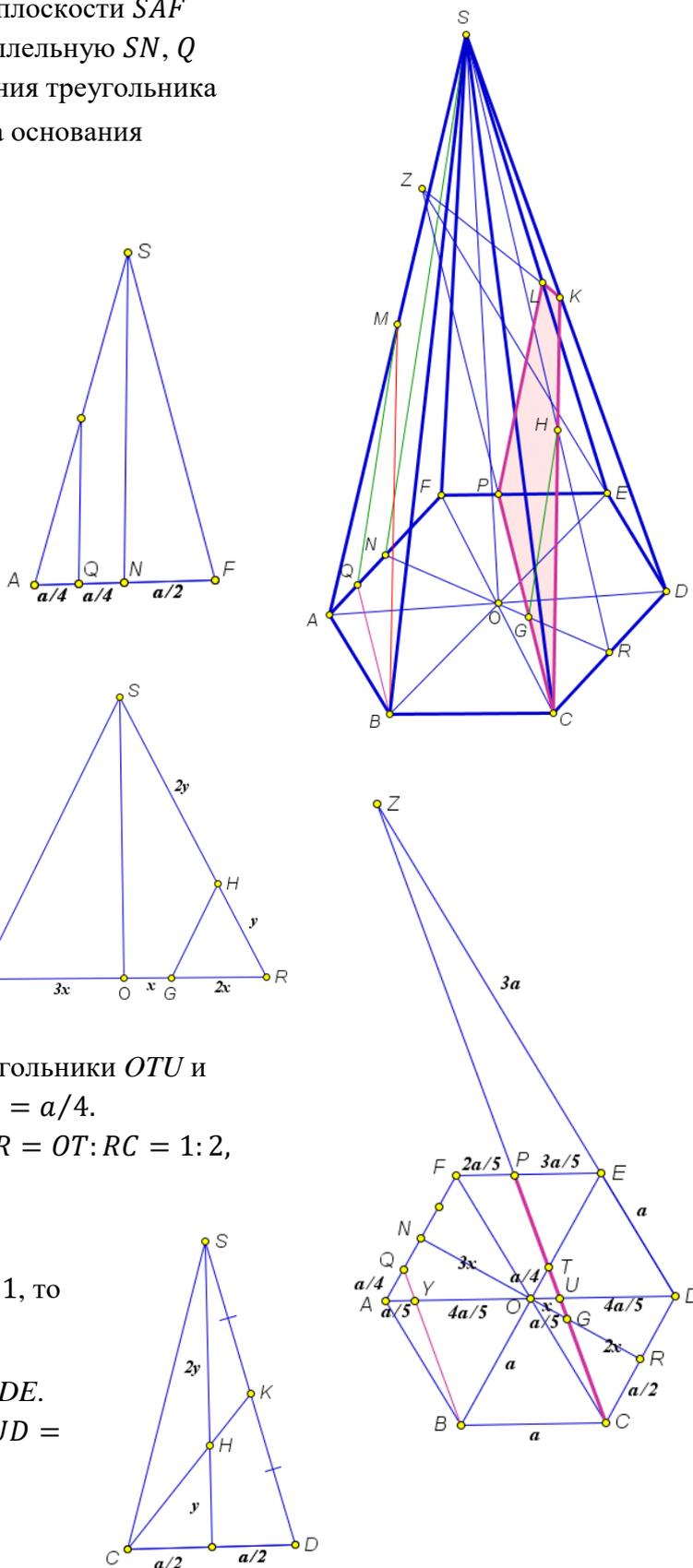
Точка Y – точка пересечения BQ и AD , треугольники YAQ и YOB подобны, $AY:YO = AQ:BO = 1:4$, $AY = a/5$, $YO = 4a/5$. Точка U – точка пересечения CP и AD , $YU = a$, $OU = a/5$, треугольники COU и CFP подобны, $OU:FP = OC:FC = 1:2$, $FP = 2a/5$, $PE = 3a/5$.

В плоскости SNR (SR – апофема грани SCD) через точку G (G – точка пересечения CP и NR) проведем прямую GH , параллельную SN , $H \in SR$. Тогда $NG:GR = SH:HR$.

Точка T – точка пересечения CP и BE , треугольники OTU и OBY подобны, $OT:OB = OU:OY = 1:4$, $OT = a/4$.
Треугольники GOT и GRC подобны, $OG:GR = OT:RC = 1:2$, $NO:OG:GR = 3:1:2$. Тогда $SH:HR = 2:1$.

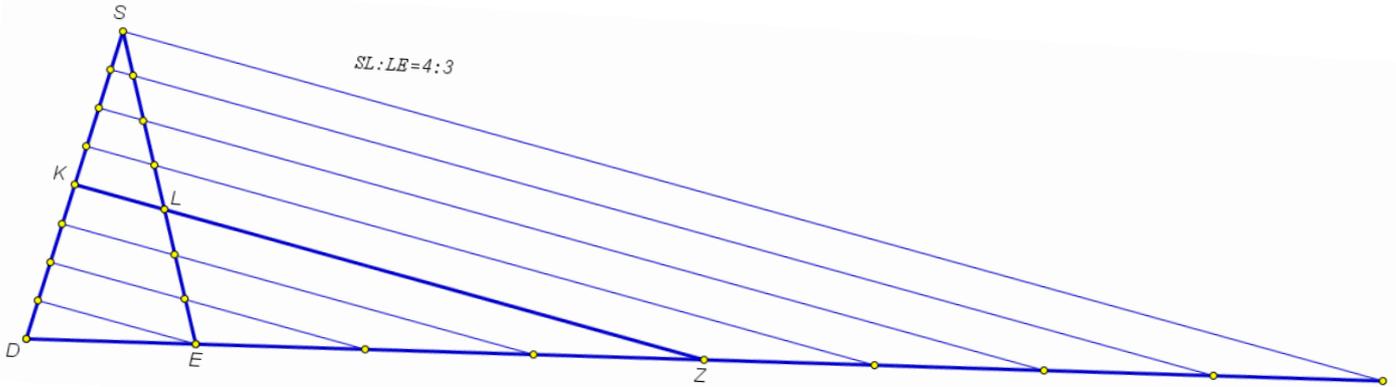
Точка K – точка пересечения CH и SD .
Поскольку SR – медиана SCD , $SH:HR = 2:1$, то CK также медиана.

Точка Z – точка пересечения прямых CP и DE .
Треугольники PZE и UZD подобны, и $PE:UD = ZE:ZD = 3:7$, $ZE = 3a$.



В плоскости SDE точка L – точка пересечения прямых ZK и SE . По теореме Фалеса имеем $SL:LE = 4:3$.

Искомое сечение $CKLP$.



Площадь сечения будем вычислять по формуле $S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi}$, где S_{np} - площадь проекции

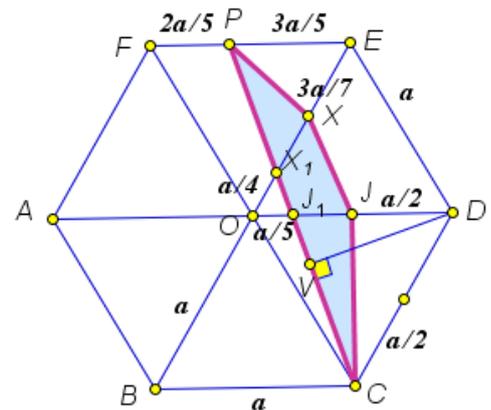
сечения на плоскость основания, φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.

Проекцией является пятиугольник $CJXP$. Площадь проекции сечения вычисляется по формуле

$$S_{np} = S_{CJ_1J} + S_{J_1JXX_1} + S_{XX_1P} =$$

$$\frac{3a^2\sqrt{3}}{40} + \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{51a^2\sqrt{3}}{280},$$

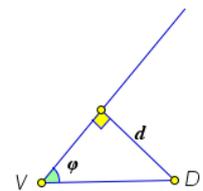
$$S_{np} = \frac{51\sqrt{3}}{70}.$$



Обозначим расстояние от точки S до плоскости сечения d , $d = 1$. Расстояние от точки D до сечения равно d . В треугольнике DCJ_1 проведем высоту DV , обозначим ее длину h . Тогда $\sin \varphi = \frac{d}{h}$, $\cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{h}\right)^2}$. Найдем CJ_1 по теореме косинусов:

$$CJ_1^2 = \frac{16a^2}{25} + a^2 - \frac{4a^2}{5} = \frac{21a^2}{25}, CJ_1 = \frac{\sqrt{21}a}{5}$$

Используя различные формулы для нахождения площади треугольника DCJ_1 , имеем



$$\frac{\sqrt{21}ah}{5} = \frac{4a^2}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{2a}{\sqrt{7}}. \text{ Тогда } \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{7d^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{4a^2 - 7d^2}}{2a} = \frac{3}{4}.$$

Окончательно имеем $S = \frac{51a^3\sqrt{3}}{140\sqrt{4a^2 - 7d^2}}$, $S = \frac{34\sqrt{3}}{35}$. **Ответ:** $\frac{34\sqrt{3}}{35}$.

6. Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом.

Пусть автомат установлен на льду на расстоянии $l = 12$ м от ворот. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот, с некоторой фиксированной начальной скоростью выброса шайбы V_0 и под различными углами α к поверхности льда. Примем точку выброса за начало отсчета системы координат. Ось абсцисс направим перпендикулярно центральной линии хоккейной площадки в сторону ворот. Ось ординат – вверх, перпендикулярно поверхности льда. В распоряжении вратаря имеется ловушка для шайб, изображенная на рисунке точкой M . Траектория движения шайбы, находящейся в воздухе и рассматриваемой как материальная точка, в зависимости от времени t в указанной системе координат



описывается уравнениями:
$$\begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha, \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$
 Определите диапазон возможных значений

квадрата начальной скорости выброса шайбы, при каждом из которых шайба попадает в ловушку и максимально возможная высота ловушки в моменты захвата шайбы не превосходит 1 м. Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Решение. Выразим время из первого уравнения системы и подставим во второе

$$y(x) = \frac{V_0 x}{V_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{g \left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2}{2} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2 \Rightarrow$$

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{(x)^2}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \Rightarrow h = l \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{(l)^2}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Чтобы шайба попала в ловушку на высоте h , требуется выполнение условия

$$\frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - l \operatorname{tg} \alpha + h = 0 \Rightarrow \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - l \operatorname{tg} \alpha + h + \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} = 0,$$

$$D = (l)^2 - 4 \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} \left(h + \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} \right) = 0 \Rightarrow h_{\max} = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2}.$$

При этом $\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{gl^2/V_0^2} = \frac{V_0^2}{gl}.$

Это же можно было получить, выделив полный квадрат,

$$h = l \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = -\frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{V_0^2}{gl} \right)^2 + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2} \leq \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2} \frac{l^2}{V_0^2}.$$

Определим диапазон изменения квадрата скорости, если $l = 12$ м и $0 \leq h_{\max} \leq 1$:

$$0 \leq h = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g \cdot 144}{2 V_0^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{V_0^4 - g^2 \cdot 144}{2gV_0^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} V_0^4 \geq 144g^2 \\ V_0^4 - 2gV_0^2 - g^2 \cdot 144 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0^4 \geq 144g^2 \\ V_0^4 - 2gV_0^2 - g^2 \cdot 144 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0^2 \geq 12g \\ (V_0^2 - g)^2 - g^2 \cdot 145 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V_0^2 \geq 12g \\ \left((V_0^2 - g) - g \cdot \sqrt{145} \right) \underbrace{\left((V_0^2 - g) + g \cdot \sqrt{145} \right)}_{>0} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0^2 \geq 12g \\ V_0^2 \leq g + g \cdot \sqrt{145} \end{cases} \Rightarrow 12g \leq V_0^2 \leq g + g \cdot \sqrt{145}$$

$$120 \leq V_0^2 \leq 10 + 10 \cdot \sqrt{145}$$

Ответ: $120 \leq V_0^2 \leq 10 + 10 \cdot \sqrt{145}$ или приближенно [120; 130]