

10-й класс

№1: Упрощение-уравнение-неравенство.

Найти наименьшее значение выражения

$$2x^2 - 14x + 42 + 2\sqrt{x^2 - 10x + 34}\sqrt{x^2 - 4x + 8}.$$

В ответ запишите квадрат этого значения.

Решение:

Заметим, что

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 14x + 42 + 2\sqrt{x^2 - 10x + 34}\sqrt{x^2 - 4x + 8} \\ &= \left(\sqrt{x^2 - 10x + 34} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 - 10x + 34} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} = \sqrt{(x - 5)^2 + 9} + \sqrt{(x - 2)^2 + 4}.$$

Первое слагаемое последнего выражения есть расстояние от точки $A(x; 0)$ до точки $B(5; -3)$, второе слагаемое – расстояние от точки $A(x; 0)$ до точки $C(2; 2)$, причем точки B и C лежат по разные стороны от оси OX . Таким образом, последнее выражение есть сумма расстояний $AB + AC$ и $AB + AC \geq BC$. Эта сумма расстояний принимает наименьшее значение, равное длине BC , только тогда, когда точка $A(x; 0)$ будет лежать на отрезке BC , $BC = \sqrt{34}$. $BC^2 = 34$ Получаем ответ: $34^2 = 1156$.

Ответ: 1156

№2: Движение-работа

Двое рабочих должны были изготовить по 36 деталей. Второй рабочий начал работать на 24 минуты позднее первого. По две трети задания они выполнили к одному времени, и чтобы закончить работу вместе с первым рабочим, второй сделал за него две детали. Сколько деталей в час изготавливал второй рабочий?

Решение:

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

Обозначим p_1, p_2 - производительности рабочих, $\frac{2}{3} \cdot 36 = 24$, $36 - 24 = 12$. По

условию задачи составим систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{24}{p_1} = \frac{24}{p_2} + \frac{24}{60} \\ \frac{10}{p_1} = \frac{14}{p_2} \end{cases}; \begin{cases} p_1 = \frac{5}{7} p_2 \\ \frac{7}{5p_2} - \frac{5}{5p_2} = \frac{1}{60} \end{cases}$$

; $\frac{2}{5p_2} = \frac{1}{60}$; $p_2 = 24 \text{дет} / \text{час}$. Примечание: p_1 в данной задаче не является целым числом.

Ответ: 24

№3: Треугольники.

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках P, Q и R. Найдите площадь треугольника PQR, если длины катетов треугольника ABC равны 3 и 4.

Ответ: 1,2

№4: Прогрессия.

Числа x, y, z – последовательные члены арифметической прогрессии.

Числа y, z, t – последовательные члены геометрической

прогрессии. $x+t=21$. $z+y=18$. Найдите числа x, y, z, t . В ответ выпишите значение x . Если таких значений несколько, то выпишите большее из них.

Ответ: 18

№5: Проценты.

Из бутылки, до краёв наполненной 12%-ным раствором соли (по объёму), отлили 1 л раствора, долили до краёв бутылку водой и перемешали. Затем отлили ещё 1 л получившегося раствора, снова полностью долили водой и перемешали. В бутылке оказался 3%-ный раствор соли. Какова вместимость бутылки (в литрах)?

Ответ: 2

№6: Множество

A – множество чисел, делящихся на 3; B – множество чисел, дающих при делении на 4 остаток 1. C – множество простых чисел. На отрезке $[100;200]$ найдите количество чисел, принадлежащих множеству

Решение:

A : 102, 105, 108, ..., 198. С помощью формулы n – го члена арифметической прогрессии найдём количество элементов данного множества на $[100;200]$.

Для этого решим неравенство $102 + 3(n - 1) \leq 200$; $n \leq 33\frac{2}{3}$, то есть в множестве

A содержится 33 элемента.

B : 101, 105, 109, 113, 117, ..., 197. Аналогично найдём количество элементов множества B на $[100;200]$. Решим неравенство $101 + 4(n - 1) \leq 200$; $n \leq 25\frac{3}{4}$. В

множестве B содержится 25 чисел. Заметим, что в множестве B каждое четвёртое число, начиная со 105, является одновременно и элементом множества A , так как делится на 3. $A \cap B$: 105, 117, ... - арифметическая прогрессия с разностью 12. Количество этих чисел тоже можно найти с помощью решения неравенства $105 + 12(n - 1) \leq 200$; $n \leq \frac{107}{12}$. Количество

элементов в пересечении множеств A и B равно 8. Далее воспользуемся формулой $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 25 - 8 = 50$.

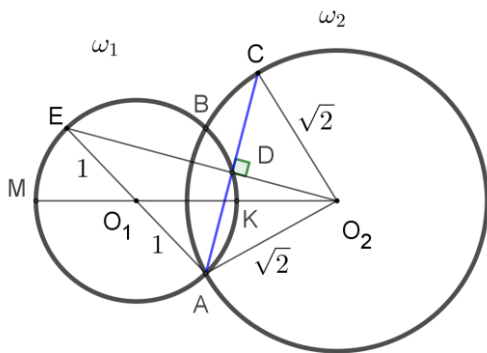
С помощью таблицы простых чисел выпишем все простые числа второй сотни: 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Числа множества A не могут быть простыми, так как они все делятся на 3, простые числа имеет смысл исключать только из множества B . Проще решить обратную задачу – найти, какие из простых чисел являются элементами множества B , то есть при делении на 4 дают остаток 1. Это числа: 101, 109, 113, 137, 149, 157, 173, 181, 193, 197, всего 10 чисел. Таким образом, $n((A \cup B) / C) = 50 - 10 = 40$.

Ответ: 40

№7: Окружности.

Даны две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 , радиусы которых 1 и $\sqrt{2}$, соответственно. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , причем расстояние между центрами O_1 и O_2 равно 2. Найти длину хорды AC окружности ω_2 , середина которой лежит на окружности ω_1 . В ответ запишите квадрат длины хорды AC .

Решение:



Пусть D – середина хорды AC . Так как $O_2A = O_2C$, то $O_2D \perp AC$. Продолжим луч O_2D до еще одного пересечения с ω_1 в точке E , получим AE – диаметр ω_1 , так как $\angle ADE = 90^\circ$.

Пусть $AD = DC = x$, далее, треугольник DCO_2 прямоугольный, следовательно, $O_2D = \sqrt{O_2C^2 - CD^2} = \sqrt{2 - x^2}$. Треугольник ADE также прямоугольный, поэтому, $ED = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{4 - x^2}$.

Пусть M, K – точки пересечения O_1O_2 и ω_1 . Так как $O_2D \cdot O_2E = O_2K \cdot O_2M$, то получим уравнение

$$\sqrt{2 - x^2} \cdot (\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{4 - x^2}) = 1 \cdot 3,$$

$$2 - x^2 + \sqrt{(2 - x^2) \cdot (4 - x^2)} = 3,$$

$$\sqrt{(2 - x^2) \cdot (4 - x^2)} = x^2 + 1,$$

$$x^4 - 6x^2 + 8 = x^4 + 2x^2 + 1,$$

$$8x^2 = 7,$$

$$x^2 = \frac{7}{8},$$

$$AC^2 = (2x)^2 = 4 \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Ответ: 3,5

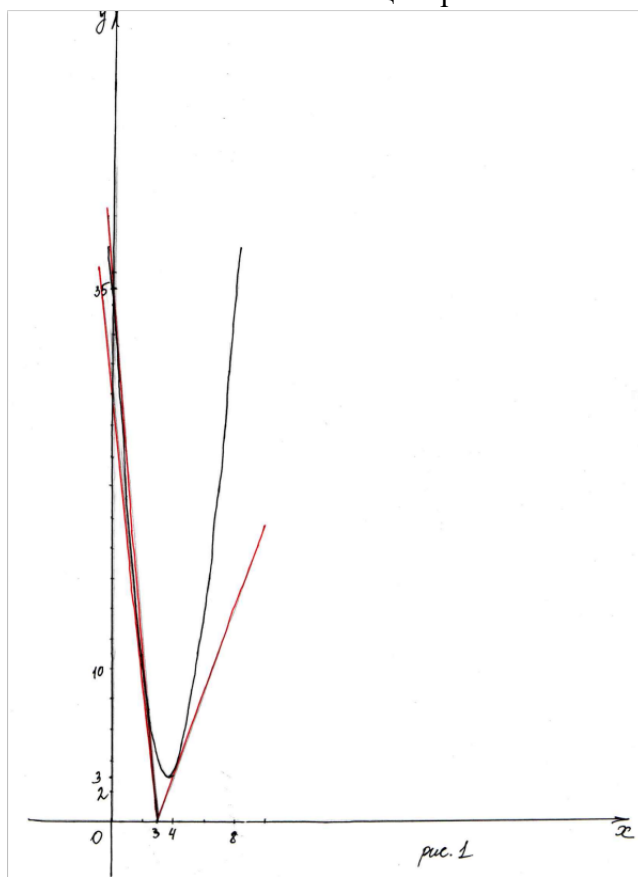
№8: Параметр.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди корней уравнения $2x^2 - 16x + 35 = a|x - 3|$ будет ровно три положительных. В ответе укажите произведение наименьшего целого значения параметра и количества изолированных точек в полученном множестве значений параметра.

Решение:

Рассмотрим функции $f(x) = 2x^2 - 16x + 35 = 2(x - 4)^2 + 3$ и $g(x) = a|x - 3|$. Построим графики этих функций в одной системе координат (см. рис.1). «Вершина» графика функции $y = g(x)$ находится в точке $(3;0)$, а направление и ширина раствора ветвей меняются в зависимости от параметра a . При $a < 0$ ветви модуля направлены вниз и график $g(x)$ не пересекает параболу. При $a = 0$ график $g(x)$ совпадает с осью Ox . Пересечение возможно только при $a > 0$. При небольших положительных a точек пересечения тоже нет. Одно решение появляется, когда правая ветвь $g(x)$ коснётся правой ветви $f(x)$. При увеличении a будет две точки пересечения – два решения. Три решения будет в случае касания левой ветви $g(x)$ с левой ветвью параболы. Правая ветвь $g(x)$ при этом пересекает параболу в двух точках. Далее будет интервал значений параметра, когда уравнение имеет 4 положительных корня (4 точки пересечения) до тех пор, пока меньший из корней не станет равным нулю, а затем отрицательным. Это произойдёт при том значении параметра, при котором график $g(x)$ пройдёт через точку с координатами $(0;35)$. Найдём это значение из уравнения $35 = 3a; a = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$.

$g(x) = a|x - 3| = \begin{cases} ax - 3a, & x \geq 3 \\ 3a - ax, & x < 3 \end{cases}$. Найдём, при каком значении a происходит касание левой ветви $g(x)$ с параболой. При этом дискриминант уравнения $2x^2 - 16x + 35 = 3a - ax$ должен быть равен нулю. $2x^2 + x(a - 16) + 35 - 3a = 0$. $D = (a - 16)^2 - 8(35 - 3a) = a^2 - 8a - 24 = 0$; $(a - 4)^2 = 40$; $a - 4 = \pm\sqrt{40} = \pm 2\sqrt{10}$; $a = 4 \pm 2\sqrt{10}$. Так как $a > 0$, то $4 - 2\sqrt{10}$ - посторонний корень; $a = 4 + 2\sqrt{10}$.



Сравним числа $4 + 2\sqrt{10}$ и $\frac{35}{3}$; $\Leftrightarrow 2\sqrt{10}u \frac{23}{3} \Leftrightarrow 40u \frac{529}{9}$. $40 < 58, \dots$

$\Rightarrow 4 + 2\sqrt{10} < \frac{35}{3}$. Это значит, что абсцисса точки касания положительна. При

$a \in (4 + 2\sqrt{10}; \frac{35}{3})$ уравнение имеет 4 положительных корня, при $a \in [\frac{35}{3}; +\infty)$ -

три положительных корня. Таким образом, уравнение имеет три различных

положительных корня при $a \in \{4 + 2\sqrt{10}\} \cup [\frac{35}{3}; +\infty)$. Наименьшее целое число

из полученных значений параметра равно 12, отдельная точка одна, $12 \cdot 1 = 12$

Ответ: 12

№9: Делимость.

Известно, что арифметическая прогрессия состоит из целых чисел, разность прогрессии равна 7 и сумма первых нескольких членов прогрессии равна 2744. Найдите все возможные значения первого члена прогрессии. В ответ запишите их сумму.

Решение.

Пусть a – первый член арифметической прогрессии, тогда сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$\frac{2a + d(n - 1)}{2}n = 2744,$$

$$(2a + 7(n - 1))n = 2 \cdot 2744 = 2^4 \cdot 7^3.$$

Если n – четно, то $2a + 7(n - 1)$ – нечетно, поэтому $n = 16k$, где k – натуральный делитель числа 7^3 . Возможные значения k : $1, 7, 7^2, 7^3$. Найдем возможные значения a .

Если $k = 1$, то $n = 16$ и $a = 119$.

Если $k = 7$, то $n = 16 \cdot 7$ и $a = -364$.

Если $k = 7^2$, то $n = 16 \cdot 7^2 = 784$ и $a = -2737$.

Если $k = 7^3$, то $n = 16 \cdot 7^3 = 5488$ и $a = -19204$.

Если n – нечетно, то $2a + 7(n - 1)$ – четно, поэтому $n = p$, где p – натуральный делитель числа 7^3 . Возможные значения p : $1, 7, 7^2, 7^3$. Найдем возможные значения a .

Если $p = n = 1$, то $a = 2744$.

Если $p = n = 7$, то $a = 371$.

Если $p = n = 7^2$, то $a = -112$.

Если $p = n = 7^3$, то $a = -1189$.

Сумма всех возможных значений a равна:

$$119 - 364 - 2737 - 19204 + 2744 + 371 - 112 - 1189 = -20372.$$

Ответ. –20372.