Профиль: математика

Вариант: 1 Класс: 10

Задача 1 (12 *баллов*). В кружке «Неумелые руки» методом тяп-ляп изготовили несбалансированные рычажные весы с плечами разной длины и чашами с разным собственным весом. В результате четырех взвешиваний на этих весах были получены следующие «равновесия»:

[слева 3 кг = справа дыня]; [слева дыня = справа 5,5 кг];

[слева 5 кг = справа арбуз]; [слева арбуз = справа 10 кг].

Каков истинный вес (масса) дыни и арбуза?

Задача 2 (16 *баллов*). Какое максимальное возможное количество идущих подряд членов возрастающей геометрической прогрессии могут быть 3-значными натуральными числами? Приведите пример такой последовательности.

Задача 3 (16 *баллов*). В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, L – точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1, K – точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1. Найдите отношение $LM:MK$, если M – точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком LK, и $AB:BC:AC = 2:3:4$.

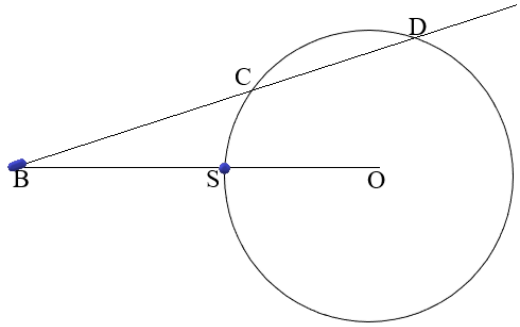
Задача 4 (16 *баллов*). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|a-3\left|x+0,5\right|+x+2,5\right|+\left|a-x^2\right| = x^2+x-3\left|x+0,5\right|+2,5$ имеет ровно два целых решения.

Задача 5 (20 *баллов*). Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через центр основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF, сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $3\sqrt{13/7}$. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Задача 6 (20 *баллов*). См. оборот.

Задача 6 (20 *баллов*). Для получения фотоснимков небесных тел используются космические зонды – автономные роботы, оснащенные ракетными двигателями, собственными энергетическими установками, системами радиосвязи и навигации, научными приборами. И все это управляется бортовыми компьютерами. Например, благодаря таким зондам успешно выполнена программа исследования Сатурна и его крупнейшего спутника Титана, удивительно похожего на Землю. При изучении одного из спутников Сатурна с радиусом орбиты $R \approx 1,2 \cdot 10^5$ *км* возникла нештатная ситуация: при пролете зонда сквозь плоскость колец Сатурна бортовая поворотная платформа с телекамерами была заклинена частицами этих колец. В результате смогли получить четкие снимки только одной стороны спутника. Для получения снимков обратной стороны спутника было принято решение продолжить полет зонда и встретить спутник в другой точке пространства, для чего пришлось скорректировать скорость движения зонда.

Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Траекторию движения спутника (орбиту) вокруг Сатурна (точка *O*) считаем круговой с радиусом $R = 1,2 \cdot 10^5$ *км*, скорость движения спутника постоянна и равна V_T = 3,27 *км/с*. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна V_1 = 6 *км/с,* а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках *C* и *D*. Согласно заложенной программе, съемка поверхности спутника зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой спутника (точки *C* и *D*). Когда спутник (точка *S*) оказывается строго на прямой между центром Сатурна (точка *O*) и подзондовой точкой (точка *B*), запускается таймер (t_0 = 0). При этом спутник и подзондовая точка встречаются в точке *C* через время $t = 2 \cdot 10^4 c$. После съемки над точкой *C* скорость зонда меняется так, чтобы над точкой *D* оказаться одновременно со спутником для фотографирования его обратной стороны. Скорость подзондовой точки на участке *CD* постоянна.



Определите расстояние между подзондовой точкой и спутником (считая его материальной точкой) в начальный момент времени t_0, а также скорость подзондовой точки V_2 на участке *CD*. В расчетах используйте приближенные значения скорости спутника и числа π - округлите их до целых значений.

Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Математика
Предмет: Математика
Класс: 10, варианты 1 и 2

Задание 1 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Установлена связь (линейная зависимость) между весами слева и справа. Составлена система из четырех уравнений.	3
Один из параметров линейной зависимости определен верно.	6
Система решена с одной вычислительной ошибкой.	9
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	12

Задание 2 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже.	0
Выписана нужная последовательность, но нет обоснования того, что количество членов этой последовательности максимально, или найдено представление $a_0 = bs^n$, $a_n = br^n$, $b \in \mathbb{N}$, $q = r/s$, $r > s$ НОД(r;s)=1 или найдены обе оценки r_n и q_n	4
Найдены все ограничения, позволяющие минимизировать перебор случаев, но разбор случаев проведен с ошибкой.	8
С полным обоснованием верно найдена точная оценка для количества членов прогрессии, верно определен знаменатель прогрессии, но последовательность не выписана или допущена вычислительная ошибка.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16

Задание 3 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Доказано, что BM – биссектриса треугольника LBK.	4
Получены верные отношения длин отрезков, которые необходимы для решения задачи	8
При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	16

Задание 4 (максимальная оценка 16 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Уравнение сведено к системе неравенств.	4
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a.	8
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек, и/или нет полного обоснования, что полученное множество значений является окончательным.	12
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	16

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно построено сечение с полным описанием построения.	5
Найдены необходимые для решения задачи отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды. Установлена связь расстояния от вершины пирамиды до плоскости сечения с углом между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.	10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20

Задание 6 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно найдены углы между прямыми, соединяющими объекты, показанные на рисунке.	5
Верно найдено расстояние между подзондовой точкой и спутником в начальный момент времени и сделаны попытки найти измененную скорость	10
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	15
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	20

Решение варианта №1 (Математика - 10 класс)

1. В кружке «Неумелые руки» методом тяп-ляп изготовили несбалансированные рычажные весы с плечами разной длины и чашами с разным собственным весом. В результате четырех взвешиваний на этих весах были получены следующие «равновесия»:

[слева 3 кг = справа дыня]; [слева дыня = справа 5,5 кг];

[слева 5 кг = справа арбуз]; [слева арбуз = справа 10 кг].

Каков истинный вес (масса) дыни и арбуза? (12 баллов)

Решение. Соотношение масс [слева x = справа y] — линейное: $y = kx+b$, где $k > 0$ и b — константы. Если [слева x = справа y] и [слева y = справа z], то $z = Kx + B$, где $K = k^2$, $B = (k+1)b$. Имеем

$$\begin{cases} K \cdot 3 + B = 5{,}5 \\ K \cdot 5 + B = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K = 9/4 \\ B = -5/4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k = 3/2 \\ b = -1/2. \end{cases}$$

отсюда находим массы: дыня $= k \cdot 3 + b$, арбуз $= k \cdot 5 + b$.

Ответ: дыня = 4 кг, арбуз = 7 кг.

2. Какое максимальное возможное количество идущих подряд членов возрастающей геометрической прогрессии могут быть 3-значными натуральными числами? Приведите пример такой последовательности. (16 баллов)

Решение. Обозначим искомые члены прогрессии $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_k = a_0 q^k$, знаменатель — несократимая дробь $q = r/s$, $r > s$. Тогда $a_0 = bs^n$, $a_n = br^n$, $b \in \mathbb{N}$, т. к. r^n и s^n взаимно просты. Получаем ограничение

$$r^n < 1000. \tag{1}$$

Ещё одно ограничение:

$$q^n = \frac{a_n}{a_0} < 10. \tag{2}$$

1) Пусть $r = 2$, тогда $q = 2$, и (2) $\Longrightarrow n \le 3$.

Рассматривать $q > 2$ незачем.

2) Пусть $r = 3$, тогда $q = 3/2$, (2) $\Longrightarrow n \le 5$. Для $n = 5$ имеем

$$r = 3, \quad s = 2, \qquad \begin{cases} a_0 = 32b \ge 100 \\ a_n = 243b < 1000 \end{cases} \Longrightarrow b = 4.$$

3) Пусть $r \ge 4$, тогда (1) $\Longrightarrow n \le 4$. Рекорд $n = 5$ побить не удастся.

Ответ: 6. Единственный пример: 128, 192, 288, 432, 648, 972.

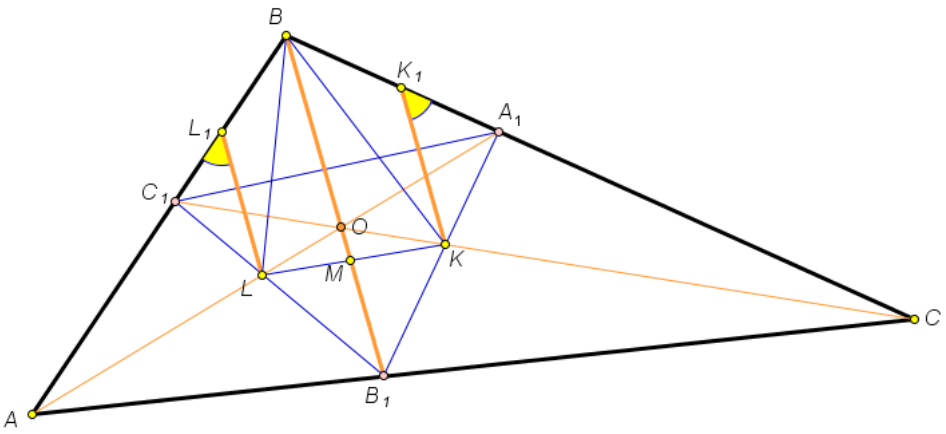
3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1, L – точка пересечения отрезков B_1C_1 и AA_1, K – точка пересечения отрезков B_1A_1 и CC_1. Найдите отношение $LM:MK$, если M – точка пересечения биссектрисы BB_1 с отрезком LK, и $AB:BC:AC = 2:3:4$. (16 баллов)

Решение.

$$AB:BC:AC = 2:3:4,$$

$$a = BC = 3x, b = AC = 4x,$$

$$c = AB = 2x.$$



Проведем прямые

$$LL_1 \parallel BB_1, KK_1 \parallel BB_1,$$

$$L_1 \in C_1B, K_1 \in A_1B.$$

$\angle C_1L_1L = \angle A_1K_1K = \angle B/2.$

По теореме Фалеса и по свойствам биссектрис имеем соотношения: $\frac{C_1L_1}{L_1B} = \frac{C_1L}{LB_1} = \frac{AC_1}{AB_1}, \frac{A_1K_1}{K_1B} = \frac{A_1K}{KB_1} = \frac{CA_1}{CB_1}$, или $\frac{C_1L_1}{L_1B} = \frac{AC_1}{AB_1}, \frac{K_1B}{A_1K_1} = \frac{CB_1}{CA_1}$,

$$\frac{C_1L_1}{L_1B} \cdot \frac{K_1B}{A_1K_1} = \frac{AC_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{CA_1}, \frac{K_1B}{L_1B} = \frac{AC_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_1}{CA_1} \cdot \frac{A_1K_1}{C_1L_1} = \frac{\boldsymbol{AC_1}}{\boldsymbol{BC_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{CB_1}}{\boldsymbol{AB_1}} \cdot \frac{BA_1}{\boldsymbol{CA_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{BC_1}}{\boldsymbol{BA_1}} \cdot \frac{\boldsymbol{A_1K_1}}{\boldsymbol{C_1L_1}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{A_1K_1}{C_1L_1},$$

$$\frac{K_1B}{L_1B} = \frac{A_1K_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{C_1L_1} = \frac{KK_1}{BB_1}\frac{BB_1}{LL_1}, (\Delta A_1KK_1 \sim \Delta A_1B_1B,\ \ \Delta C_1LL_1 \sim \Delta C_1B_1B), \qquad \frac{K_1B}{L_1B} = \frac{KK_1}{LL_1}.$$

Поскольку $\angle BL_1L = \angle BK_1K$, $\frac{LL_1}{L_1B} = \frac{KK_1}{K_1B}$, то треугольники BL_1L и BK_1K подобны,

$\angle LBM = \angle L_1LB = \angle K_1KB = \angle KBM$. Следовательно, BM – биссектриса треугольника LBK, $LM:MK = BL:BK$.

По теореме Менелая для треугольника ABO, имеем

$$\frac{AL}{LO} \cdot \frac{OB_1}{BB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} = 1, \frac{AL}{LO} = \frac{b}{a} \cdot \frac{BO+OB_1}{OB_1} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a+c}{b} + 1\right) = \frac{a+c+b}{a}.$$

$$\Delta ALL_1 \sim \Delta AOB, \qquad \frac{AL}{AO} = \frac{LL_1}{BO}, \frac{AL}{AL+LO} = \frac{LL_1}{BO}, \qquad LL_1 = \frac{a+b+c}{2a+b+c} \cdot BO.$$

Аналогично, $\frac{CK}{KO} = \frac{a+c+b}{c}$, $KK_1 = \frac{a+b+c}{a+b+2c} \cdot BO$.

$$\frac{LM}{MK} = \frac{LB}{KB} = \frac{LL_1}{KK_1} = \frac{a+b+2c}{2a+b+c} = \frac{3x+4x+4x}{6x+4x+2x} = \frac{11}{12}.$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{11}{12}}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|a-3|x+0,5|+x+2,5|+|a-x^2|=x^2+x-3|x+0,5|+2,5$ имеет ровно два целых решения.

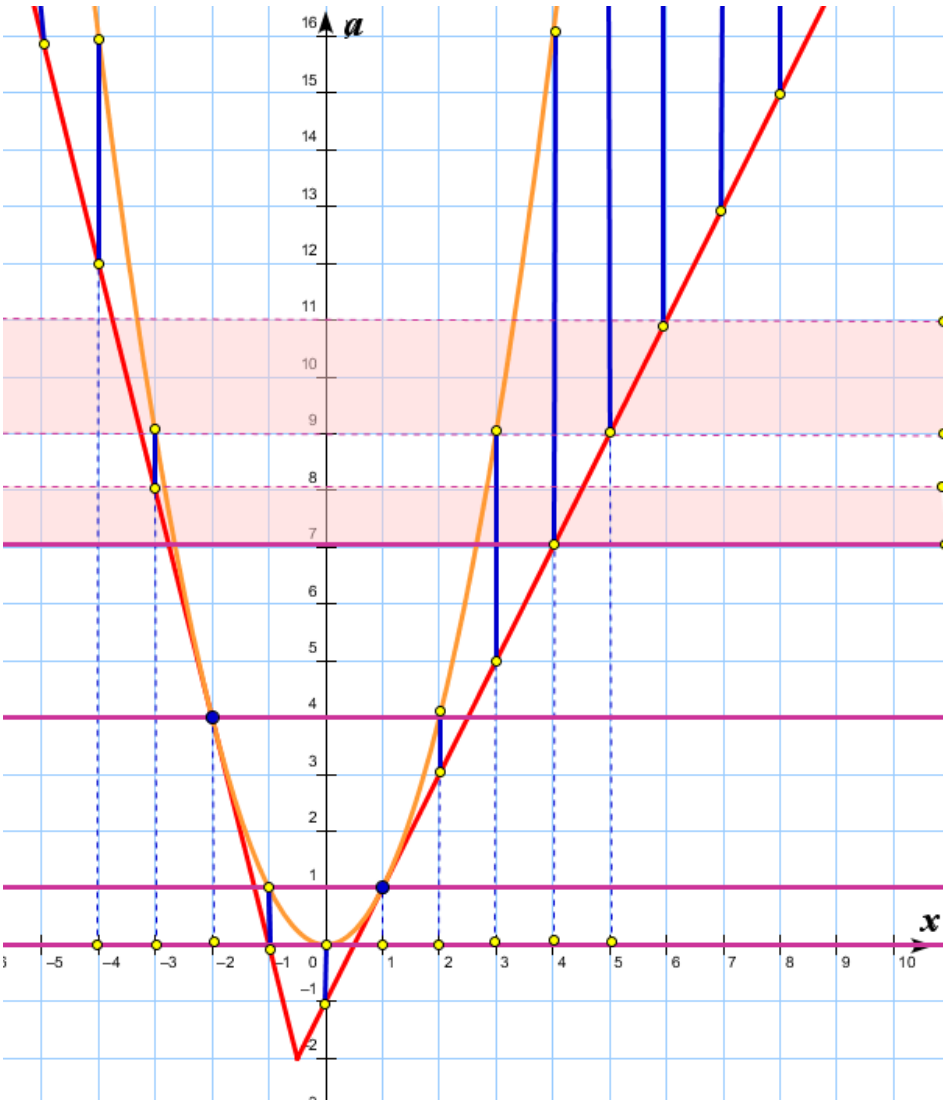
(16 баллов)

Решение:

Обозначим $u=a-3|x+0,5|+x+2,5$, $v=a-x^2$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид $|u|+|v|=u-v$. Решениями последнего уравнения являются все u и v такие, что $u\ge 0$, $v\le 0$, или $a-3|x+0,5|+x+2,5\ge 0$ и $a-x^2\le 0$. Отсюда имеем $3|x+0,5|-x-2,5\le a\le x^2$.

В системе Oxa построим графики функций $a=3|x+0,5|-x-2,5$ и $a=x^2$.

Правый луч угла лежит на прямой $a=2x-1$, левый луч угла лежит на прямой $a=-4x-4$.



Найдем точки пересечения параболы с этими прямыми:

$x^2=2x-1,\ x=1,\ a=1;$

$x^2=-4x-4,\ x=-2,\ a=4.$

При $a=0$ имеем два решения $x=-1$, $x=0$. При $a=1$ имеем два решения $x=-1$, $x=1$.

При $a=4$ имеем два решения $x=-2$, $x=2$.

При $a\in[7;8)$ имеем два решения $x=3$, $x=4$.

При $a\in(9;11)$ имеем два решения $x=4$, $x=5$.

При остальных $a<12$ ровно двух решений не будет. Если $\frac{a+1}{2}-\sqrt{a}\ge 3$, то уравнение будет иметь не менее трех целых положительных решений.

Решим это неравенство:

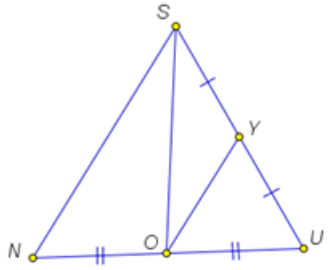
$a-2\sqrt{a}-5\ge 0,\ \sqrt{a}\ge 1+\sqrt{6}.$

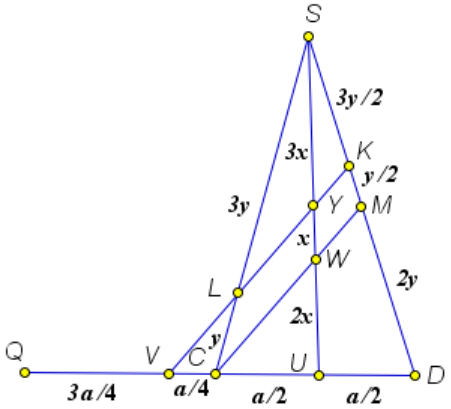
Если $a\ge 12$, то рассматриваемое неравенство выполняется.

Ответ: $a\in\{0;1;4\}\cup[7;8)\cup(9;11)$.

5. Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через центр основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF, сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $3\sqrt{13/7}$. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. (20 баллов)

Решение. В плоскости SNU (SU – апофема грани SCD) через точку O проведем прямую OY, параллельную SN, $Y \in SU$, OY – средняя линия треугольника SNU.





$SK:KD=3:5$

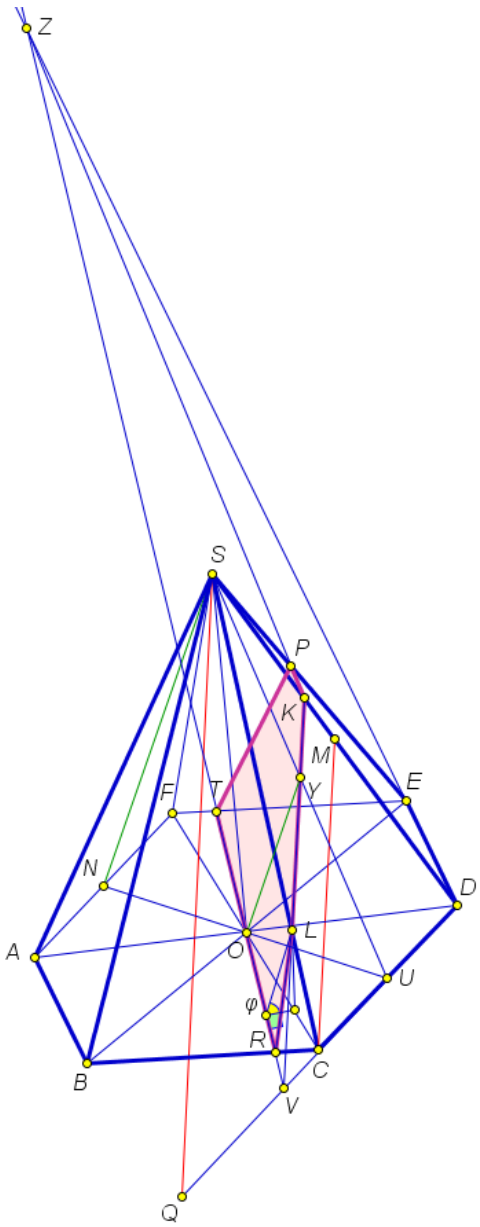
$SL:LC=3:1$

В плоскости SCD через точку Y проведем прямую KL, параллельную CM, $K \in SD$, $L \in SC$.

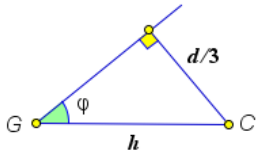
Медианы SU и CM треугольника SCD в точке пересечения W делятся в отношении 2:1, т.е. $SW:WU=2:1$. Имеем $SY:YW:WU=3:1:2$. Согласно теореме Фалеса, приходим к соотношениям $SL:LC=3:1$, $SK:KD=3:5$.

Точка V – точка пересечения прямой KL и CD, $KM:MD=VC:CD=1:4$.

В плоскости основания проведем прямую VO, точки R и T – точки пересечения со сторонами BC и FE соответственно. Треугольники RCV и ODV подобны, и $SL:LC=3:1$, $SK:KD=3:5$. Обозначим сторону основания a, тогда $RC=FT=a/5$, $BR=TE=4a/5$.

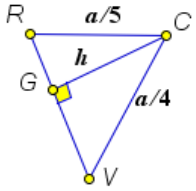


Пусть φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Обозначим расстояние от точки S до плоскости сечения d, $d = 3\sqrt{13/7}$. Расстояние от точки C до сечения равно $d/3$. В треугольнике RCV проведем высоту CG, обозначим ее длину h. Тогда



$\sin\varphi = \dfrac{d}{3h}$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - \dfrac{d^2}{9h^2}}$. Найдем RV по теореме косинусов:

$RV^2 = \dfrac{a^2}{25} + \dfrac{a^2}{16} - \dfrac{a^2}{20} = \dfrac{21a^2}{400}$, $RV = \dfrac{a\sqrt{21}}{20} = \dfrac{2\sqrt{21}}{5}$. Используя различные формулы для нахождения площади треугольника RCV, имеем



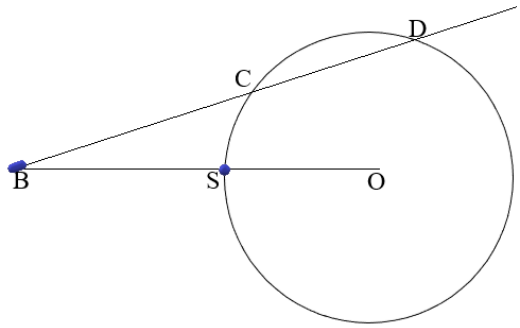
$\dfrac{a\sqrt{21}}{20} h = \dfrac{a^2}{20} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $h = \dfrac{a}{2\sqrt{7}} = \dfrac{4}{\sqrt{7}}$. Тогда

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{d^2}{9h^2}} = \sqrt{1 - \frac{28d^2}{9a^2}} = \frac{\sqrt{9a^2 - 28d^2}}{3a} = \sqrt{1 - \frac{28 \cdot 9 \cdot 13}{9 \cdot 64 \cdot 7}} = \sqrt{1 - \frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

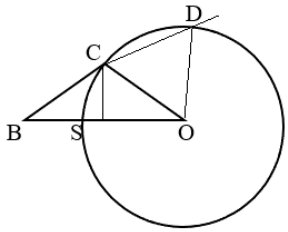
6. Для получения фотоснимков небесных тел используются космические зонды – автономные роботы, оснащенные ракетными двигателями, собственными энергетическими установками, системами радиосвязи и навигации, научными приборами. И все это управляется бортовыми компьютерами. Например, благодаря таким зондам успешно выполнена программа исследования Сатурна и его крупнейшего спутника Титана, удивительно похожего на Землю. При изучении одного из спутников Сатурна с радиусом орбиты $R \approx 1,2 \cdot 10^5$ *км* возникла нештатная ситуация: при пролете зонда сквозь плоскость колец Сатурна бортовая поворотная платформа с телекамерами была заклинена частицами этих колец. В результате смогли получить четкие снимки только одной стороны спутника. Для получения снимков обратной стороны спутника было принято решение продолжить полет зонда и встретить спутник в другой точке пространства, для чего пришлось скорректировать скорость движения зонда.

Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Траекторию движения спутника (орбиту) вокруг Сатурна (точка O) считаем круговой с радиусом $R = 1,2 \cdot 10^5$ *км*, скорость движения спутника постоянна и равна $V_T = 3,27$ *км/с*. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна $V_1 = 6$ *км/с*, а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках C и D. Согласно заложенной программе, съемка поверхности спутника зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой спутника (точки C и D). Когда спутник (точка S) оказывается строго на прямой между центром Сатурна (точка O) и подзондовой точкой (точка B), запускается таймер ($t_0 = 0$). При этом спутник и подзондовой точка встречаются в точке C через время $t = 2 \cdot 10^4 c$. После съемки над точкой C скорость зонда меняется так, чтобы над точкой D оказаться одновременно со спутником для фотографирования его обратной стороны. Скорость подзондовой точки на участке CD постоянна.



Определите расстояние между подзондовой точкой и спутником (считая его материальной точкой) в начальный момент времени t_0, а также скорость подзондовой точки V_2 на участке CD. В расчетах используйте приближенные значения скорости спутника и числа π - округлите их до целых значений.

Решение. Т.к. скорость V_1=6 *км/с*, а время движения тела и подзондовой точки совпадают, следовательно, $BC = 1,2 \cdot 10^5 = R$, т.е. треугольник BCO – равнобедренный. Обозначим $\angle COS = \alpha$ Тогда $BO = 2R\cos(\angle COS) \quad \Rightarrow \quad BS = BO - R = R(2\cos\alpha - 1)$.



$$\overset{\frown}{SC} = \frac{\pi R}{180^0} \cdot \alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{180^0\,\overset{\frown}{SC}}{\pi R} = \frac{180^0 V_T t}{\pi R} \approx \frac{180^0 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^4}{3 \cdot 1,2 \cdot 10^5} = \frac{36^0 \cdot 10^5}{12 \cdot 10^4} = 30^0$$

$$BS = R(2\cos 30° - 1) = 1,2 \cdot 10^5(\sqrt{3} - 1)$$

$$\angle DCO = 60^0 \;\Rightarrow\; CD = R,\;\; \overset{\frown}{CD} = \frac{\pi R}{3} \;\Rightarrow\; V_2 = \frac{CD}{t_2} = \frac{CD}{\overset{\frown}{CD}} V_T = \frac{3R}{\pi R} \cdot 3 \approx 3 \text{ км/с}$$

Ответ: $1,2 \cdot 10^5(\sqrt{3} - 1)$ км, 3 км/с