

9-й класс

№1: Комбинаторика.

4. В коробке лежат 3 белых чашки, 3 красных чашки и 2 черных чашки. Соня достала из коробки 5 чашек наугад. Какова вероятность, что она достала 2 белых, 2 красных и 1 черную чашку? (Ответ округлите до сотых).

Решение:

Белые чашки обозначим как Б, красные как К, черные как Ч.

1) Вероятность достать 2 белых, затем 2 красных, затем 1 черную чашку, то есть ББККЧ (именно в таком

$$\text{порядке): } \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{280}$$

2) Количество способов, которыми мы можем переставить буквы в буквосочетании ББККЧ - это:

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

$$3) \frac{30 \cdot 3}{280} = \frac{9}{28}$$

Ответ: 0,32

№2: Параметр.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left(\left| \frac{ax^2 - ax - 12a + x^2 + x + 12}{ax + 3a - x - 3} \right| - a \right) \cdot |4a - 3x - 19| = 0$$

имеет одно решение. В ответе запишите наибольшее значение параметра a

Решение:

$$\begin{aligned} \text{Упростим } \frac{ax^2 - ax - 12a + x^2 + x + 12}{ax + 3a - x - 3} &= \frac{ax^2 - x^2 + (-ax + x) + (-12a + 12)}{a(x+3) - (x+3)} = \\ &= \frac{x^2(a-1) - x(a-1) - 12(a-1)}{(x+3)(a-1)} = \frac{(a-1)(x^2 - x - 12)}{(x+3)(a-1)} = \\ &= \frac{x^2 + 3x - 4x - 12}{x+3} = \frac{(x+3)(x-4)}{x+3} = x - 4 \end{aligned}$$

$$\text{Получим } \begin{cases} (|x-4| - a) \cdot |4a + 3x - 19| = 0 \\ a \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} |x-4| - a = 0 \\ 4a + 3x - 19 = 0, \\ a \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = |x-4| \\ a = -0,75x + 4,75 \\ a \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

Построим график в системе координат xOa

$a = -0,75x + 4,75$ – прямая

x	-3	5
y	7	1

$a = |x - 4|$ график получим из $a = |x|$ смещением на 4 ед.отр. вправо

Т.к. $x \neq -3$, то $a \neq 7$

$a \neq 1$, то $x \neq 3; x \neq 5$

Точки $(-3; 7); (3; 1); (5; 1)$ – выколотые

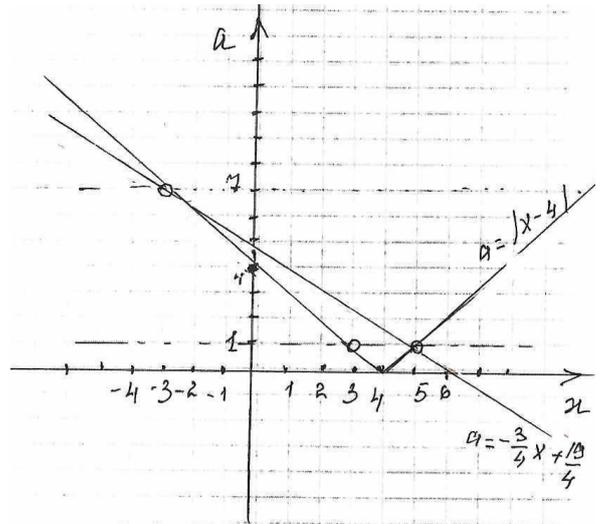
При $a \in (-\infty; 0) \cup \{7\}$ – одно решение

При $a \in (0; 1) \cup (1; 7) \cup (7; +\infty)$ – три решения

При $a = 0$ два решения

При $a = 1$ нет решений

Ответ: 7



№3: Треугольники.

1. В треугольнике ABC угол C прямой, CD – высота. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 6 и 8 соответственно. **Ответ: 10**

№4: Свойства чисел.

2. При сложении двух натуральных чисел Алёша случайно приписал лишнюю цифру, поэтому вместо числа 23456 он получил число 55555. Определите какое число случайно приписал Алёша.

решение.

Пусть Алёша складывал числа x и y . Когда он к одному из них (пусть к x) приписал лишнюю цифру a , то число стало равно $10x + a$. Получим систему

$$\text{уравнений: } \begin{cases} x + y = 23456; \\ (10x + a) + y = 55555 \end{cases} \Leftrightarrow 9x + a = 32099 \Leftrightarrow 9x = 32099 - a \Leftrightarrow a = 5 \Leftrightarrow 9x = 32094$$

$$\Leftrightarrow x = 3566 \quad \Leftrightarrow y = 19890. \quad \text{ответ: 5;}$$

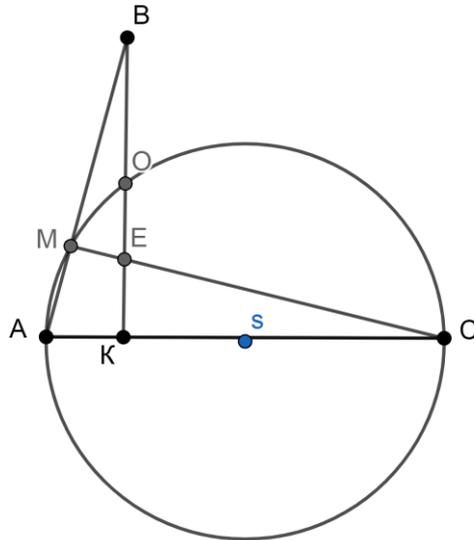
№5: Проценты.

Фляга наполнена 96%-ным раствором соляной кислоты. Из неё отлили 12 л кислоты и дополнили флягу водой. Затем из фляги отлили ещё 18 л и снова дополнили её водой, после чего концентрация кислоты во фляге составила 32%. Найдите объём фляги.

Ответ: 36 л

№6: Планиметрия.

№2. Из точек В и С острого угла ВАС проведены перпендикуляры СМ и ВК, пересекающиеся в точке Е, так, что точка М лежит на АВ, а К лежит на АС. Через точки А, М и С проведена окружность, пересекающая ВК в точке О, причём $BE = 17$, $OK = 72$. $AK:KC=1:4$. Найдите тангенс угла ВАС. (отношение ВК к АК).



Решение.

- 1) Пусть $OE=x \Rightarrow VO=BE-OE=17-x$ и $BK=VO+OK=17-x+72=89-x$.
- 2) $BK \perp AC \Rightarrow KO=KH=72 \Rightarrow VH=VO+OH=17-x+144=161-x$.
- 3) $\triangle AVK \sim \triangle EMB \Rightarrow VM/BK=BE/AB \Rightarrow VM \cdot AB=BK \cdot BE$.
- 4) VA и VE – секущие $\Rightarrow VM \cdot AB=VO \cdot VH$.
- 5) Из (3 и 4) $\Rightarrow VO \cdot VH=BK \cdot BE \Rightarrow (17-x)(161-x)=(89-x)17 \Rightarrow x^2-161x+1224=0 \Rightarrow x=8$ или $x=153 \Rightarrow OE=8$; $VO=9$; $BK=81$.
- 6) $AK \cdot KC=KO \cdot KH \Rightarrow 4AK^2=72^2 \Rightarrow AK=36 \Rightarrow BK/AK=81/36=2,25$.

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

$$p^2 - 144p + (5184 + 0,1a^2) = 0 \text{ поэтому, } D = 72^2 - (5184 + 0,1a^2) = -0,1a^2.$$

Следовательно, уравнение может иметь решение только при $a=0$. $p=72$
следовательно $x=y=72$. **ответ: 0.**

№9: Делимость.

Найдите наименьшее число из натуральных чисел, превосходящих 2022 и делящих нацело число $2021!! + 2022!!$. (Символом $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность: $n!! = n \cdot (n - 2) \cdot (n - 4) \dots$)

Ответ. 2023.

Решение.

Докажем, что $2021!! + 2022!!$ делится на число 2023. Действительно,
 $2022!! = (2023 - 1)(2023 - 3)(2023 - 5) \dots (2023 - 2021)$,
остаток от деления этого числа на 2023 равен остатку от деления произведения

$$(-1)(-3)(-5) \dots (-2021) = (-1)^{\frac{2022}{2}} \cdot 2021!! = -2021!!$$

на 2023. Следовательно, $2021!! + 2022!!$ делится на число 2023. Так как 2023 – это наименьшее число из натуральных чисел, превосходящих 2022, то получаем ответ.

Ответ. 2023.