Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

8 класс.

1. Найти значение выражения $\left(\left(\frac{3}{a-b}+\frac{3a}{a^3-b^3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right)\boxed{?}\ \frac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}\right)\cdot\frac{3}{a+b}$ при a=2023, b=2020

Решение:

$$\left(\left(\frac{3}{a-b}+\frac{3a}{(a-b)(a+b)}\right)\boxed{?}\ \frac{2a+b}{(a+b)^2}\right)\cdot\frac{3}{a+b}=\left(\left(\frac{3(a+b)+3a}{(a-b)(a+b)}\right)\cdot\frac{(a+b)^2}{2a+b}\right)\cdot\frac{3}{a+b}=\left(\frac{3(2a+b)}{(a-b)}\cdot\frac{(a+b)}{2a+b}\right)\cdot\frac{3}{a+b}=\frac{3(a+b)}{a-b}\cdot\frac{3}{a+b}=\frac{9}{a-b}$$

Получаем ответ: $\frac{9}{a-b}=\frac{9}{2023-2020}=\frac{9}{3}=3$

Ответ: 3

2. Внутри квадрата $ABCD$ со стороной равной 5 расположена точка X. Площади треугольников AXB, BXC и CXD относятся как $1:5:9$. Найти сумму квадратов расстояний от точки X до сторон квадрата.

Решение:

Пусть сторона квадрата равна $a=5$, а расстояния от точки X до сторон AB, BC, CD и DA равны h_1, h_2, h_3 и h_4, соответственно. Так как площадь треугольника равна $S=\frac{1}{2}ah$, то делаем вывод, что $h_1:h_2:h_3=1:5:9$ или $h_1=x$, $h_2=5x$, $h_3=9x$. Но суммы расстояний от точки, лежащей внутри квадрата равны стороне квадрата $h_1+h_3=h_2+h_4=a$, тогда $h_1=\frac{1}{10}a$, $h_2=\frac{5}{10}a=\frac{1}{2}a$, $h_3=\frac{9}{10}a$, $h_4=\frac{5}{10}a=\frac{1}{2}a$. Получаем, что

$$h_1^2+h_2^2+h_3^2+h_4^2=a^2\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{4}+\frac{81}{100}+\frac{1}{4}\right)=25\cdot\frac{132}{100}=33.$$

Ответ: 33.

3. Катер прошёл против течения реки 165 км и вернулся обратно. На обратном пути он затратил на 4 ч меньше, чем на путь туда. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Решение:

$$\begin{matrix} v_{\text{по т.}}=v_{\text{с}}+v_{\text{т.}} \\ v_{\text{пр.т.}}=v_{\text{с}}-v_{\text{т.}} \end{matrix} => v_{\text{по т.}}-v_{\text{пр.т.}}=2v_{\text{т.}}=2\cdot2=4$$

Тогда $v_{\text{пр.т.}}=x$ км/ч, $v_{\text{по т.}}=x+4$ км/ч

Пусть катера $t_{\text{пр.т.}} = y$ ч, $t_{\text{по.т.}} = y - 4$ ч

Получим $xy = 165$ и $(x + 4)(y - 4) = 165$ => $xy = (x + 4)(y - 4)$ =>

=> $4y - 4x = 16$ => $y - x = 4$ => $y = x + 4$

Тогда $x(x + 4) = 165$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 - 165 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 169 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x + 2 - 13 = 0 \\ x + 2 + 13 = 0 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = 11 \\ x = -15 \end{array}\right.$$

-15 – посторонний корень

$v_{\text{с}} = v_{\text{пр.т.}} + v_{\text{т}} = 11 + 2 = 13$(км/ч)

Ответ: 13 км/ч.

4. В коробке лежат 3 белых чашки, 3 красных чашки и 2 черных чашки. Соня достала из коробки 5 чашек наугад. Какова вероятность, что она достала 2 белых, 2 красных и 1 черную чашку? (Ответ округлите до сотых).

Решение:

Белые чашки обозначим как Б, красные как К, черные как Ч.

1) Вероятность достать 2 белых, затем 2 красных, затем 1 черную чашку, то есть ББККЧ (именно в таком порядке): $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{280}$

2) Количество способов, которыми мы можем переставить буквы в буквосочетании ББККЧ - это:

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$$

3) $\frac{30 \cdot 3}{280} = \frac{9}{28}$

Ответ: 0,32

5. . Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\left|\frac{ax^2 - ax - 12a + x^2 + x + 12}{ax + 3a - x - 3}\right| - a\right) \cdot |4a - 3x - 19| = 0$$

имеет одно решение. В ответе запишите наибольшее значение параметра a

Решение:

Упростим $\frac{ax^2 - ax - 12a + x^2 + x + 12}{ax + 3a - x - 3} = \frac{ax^2 - x^2 + (-ax + x) + (-12a + 12)}{a(x+3) - (x+3)} =$

$$= \frac{x^2(a-1) - x(a-1) - 12(a-1)}{(x+3)(a-1)} = \frac{(a-1)(x^2 - x - 12)}{(x+3)(a-1)} =$$

$$= \frac{x^2 + 3x - 4x - 12}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 4)}{x + 3} = x - 4$$

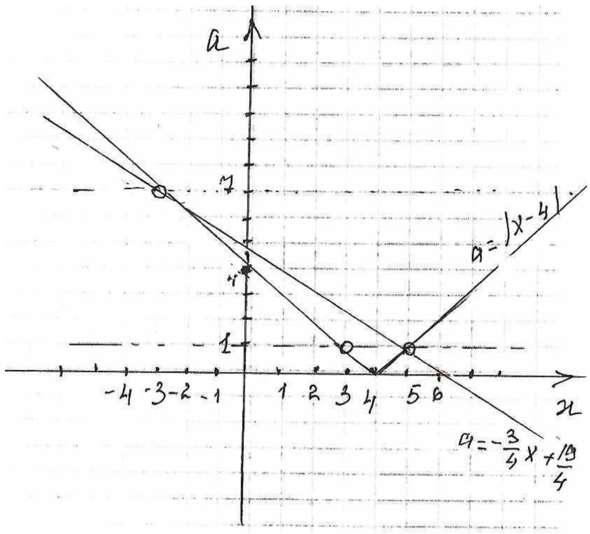
Получим $\begin{cases} (|x-4| - a) \cdot |4a + 3x - 19| = 0 \\ a \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} |x-4| - a = 0 \\ 4a + 3x - 19 = 0 \end{array} \right. \\ a \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$;

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = |x-4| \\ a = -0{,}75x + 4{,}75 \end{array} \right. \\ a \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Построим график в системе координат xOa

$a = -0{,}75x + 4{,}75$ – прямая

x	-3	5
y	7	1



$a = |x - 4|$ график получим из $a = |x|$ смещением на 4 ед.отр. вправо

Т.к. $x \neq -3$, то $a \neq 7$

$a \neq 1$, то $x \neq 3; x \neq 5$

Точки (-3; 7); (3; 1); (5; 1) – выколотые

При $a \in (-\infty; 0) \cup \{7\}$ – одно решение

При $a \in (0; 1) \cup (1; 7) \cup (7; +\infty)$ – три решения

При $a = 0$ два решения

При $a = 1$ нет решений

Ответ: 7

6. В треугольнике ABC с прямым углом при вершине B на большем катете BC отложили отрезок BD равный меньшему катету. Точки K и N основания перпендикуляров, опущенных на гипотенузу из точек B и D, соответственно. Найти длину отрезка BK, если $AK = ND = 2$.

Решение:

Опустим из точки D перпендикуляр на отрезок BK, пусть точка M - основание этого перпендикуляра. Тогда прямоугольные треугольники AKB и BMD равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $BM = AK = 2$. Четырехугольник $MKND$ является прямоугольником и $MK = ND = 2$, тогда $BK = BM + MK = 2 + 2 = 4$.

Ответ: 4.

7. Производство x тыс. ед. продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 - 2x - 10$ млн.руб. в год. При цене p тыс. руб. за единицу годовая прибыль от продажи этой

продукции(в млн. руб.) составляет $px - q$. Завод выпускает продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшая. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 126 млн. руб.

Решение:

Пусть годовая прибыль $f(x) = px - q = px - 0{,}5x^2 + 2x + 10 =$

$-0{,}5x^2 + x(p + 2) + 10 = -0{,}5(x^2 - 2x(p + 2) - 20) =$

$= -0{,}5(x^2 - 2x(p + 2) + (p + 2)^2 - (p + 2)^2 - 20) =$

$=-0{,}5(x - (p + 2))^2 + (p + 2)^2 /2 + 10$

Квадратный трехчлен f(x) достигает наибольшего значения при x = p + 2 и равно $(p+2)^2 /2 + 10$

Через три года суммарная прибыль должна быть не менее 126 млн. руб., получим

$(p+2)^2 /2 + 10 \geq 126 /3$

$(p + 2)^2 \geq 42 \cdot 2 - 20,$

$(p + 2)^2 \geq 64, \left[\begin{array}{l} p + 2 \geq 8 \\ p + 2 \leq -8, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} p \geq 6 \\ p \leq -10, \end{array}\right.$

но p > 0 => $p \geq 6$.

Ответ: p = 6.

8. В треугольнике ABC стороны AB, AC, BC равны 5, 6 и 7 соответственно. На медиане AM отложили отрезок AK равный 2. Найти отношение площадей треугольников ABK и ACK. В ответ записать $\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}}$.

Решение:

Медиана треугольника делит треугольник на два равновеликих (равных по площади). В треугольнике ABC равны площади треугольников ABM и ACM, так как AM является его медианой, в треугольнике KBC медианой является отрезок KM, значит, равны площади треугольников KBM и KCM.
$S_{ABK} = S_{ABM} - S_{KBM} = S_{ACM} - S_{KCM} = S_{ACK}$, получаем, что $S_{ABK} : S_{ACK} = 1$

Ответ: 1.

9. Найдите наименьшее натуральное n, для которого 1999! не делится на 34^n. (n!=1·2·3·...·n)

Решение:

$34=2\cdot17$. Узнаем, в какой степени число 17 войдет в разложение 1999! (2 - очевидно войдет в данное разложение в большей степени). $117<\frac{1999}{17}<118;\ \ 6<\frac{1999}{17^2}<7$ отсюда, 117 входит в 1999! 123 раза, а чтобы не делилось добавим еще 1.

Ответ: 124