Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

Вариант № 1

1. Из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми равно 12 *км*, одновременно вышел пешеход и выехал автобус. Доехав до пункта *B* менее чем за один час, автобус, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту *A* со скоростью, в два раза большей первоначальной. Через 12 *мин* после своего отправления из пункта *B* автобус встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в *км/ч*) пешехода, и для этого значения скорости пешехода определите первоначальную скорость автобуса (в *км/ч*). В ответ запишите сумму найденных значений скоростей пешехода и автобуса. (5 баллов)

2. Сколько корней имеет уравнение

$\sqrt[3]{|x|}+10[x]=10x$? **(**$[x]$ – целая часть числа x, т.е. $[x]\in Z, [x]\leq x<[x]+1$). (5 баллов)

3. Решите неравенство $2\sqrt{x^2}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\pi}{6x^2}+\frac{\pi}{2}\geq\frac{\pi}{3}|x|-\left(\frac{1}{x^2}-3\right)\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$.

В ответ запишите сумму всех целых значений *x*, удовлетворяющих этому неравенству.

(6 баллов)

4. Сколькими способами можно погрузить семь разных изделий (3 по 2 тонны, 4 по 1 тонне) в два фургона грузоподъемностями 6 т и 5 т, если расположение грузов внутри фургона не важно?
(12 баллов)

5. Числа от 100 до 999 выписаны без пробелов. С каким остатком полученное 2700-значное число делится на 7? (12 баллов)

6. Какое наименьшее расстояние может быть между двумя точками, одна из которых лежит на графике функции $y=x^2$, другая — на кривой, заданной уравнением

$$4x^2+4y^2-48x-24y+163=0.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (12 баллов)

7. В треугольнике *ABC*, площадь которого равна$180\sqrt{3}$, проведены биссектриса *AD* и высота *AH*. Окружность радиуса $\frac{105\sqrt{3}}{4}$с центром, лежащим на прямой *BC*, проходит через точки *A* и *D*. Найдите радиус описанной около треугольника *ABC* окружности, если $BH^2-HC^2=768$. (16 баллов)

8. Найдите наименьшее целое значение параметра *a*, при котором уравнение $x^2+2x+a^2+2a-5=2\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-ax\right)$ имеет единственное решение. Функция $f(t)$ задается соотношением $f(t)=\frac{\sqrt[3]{(27\cdot t^2+4)(t+2)+32t}}{t-\sqrt{t^2}}$ при всех возможных значениях *t*. (16 баллов)

9. В правильной четырехугольной пирамиде *TABCD* через центр основания *ABCD* проведено сечение плоскостью параллельно медиане *AM* боковой грани *TAB* и апофеме *TK* боковой грани *TCD*. Найдите объем пирамиды с вершиной в точке *T*, основанием которой является указанное выше сечение, если высота пирамиды *TABCD* равна 12, а расстояние между прямой *AM* и плоскостью сечения равно $\sqrt{3}$. (16 баллов)

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Отборочный этап

11 класс
Максимальная сумма баллов за 9 задач варианта – 100.
Распределение баллов по задачам следующее:

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Баллы	5	5	6	12	12	12	16	16	16

За каждую задачу выставляется либо максимальный балл в случае правильного ответа, либо 0, если ответ отсутствует или неверный.

Решение варианта № 1 (11 класс, отборочный этап)

1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 12 км, одновременно вышел пешеход и выехал автобус. Доехав до пункта В менее чем за один час, автобус, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту А со скоростью, в два раза большей первоначальной. Через 12 мин после своего отправления из пункта В автобус встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода определите первоначальную скорость автобуса (в км/ч). В ответ запишите сумму найденных значений скоростей пешехода и автобуса. (5 баллов)

Решение. Пусть x – скорость пешехода (в км/ч), y – скорость автомобиля (в км/ч) на пути из A в B, $2y$ – скорость автомобиля на пути из B в A, t – время (ч), затраченное автомобилем на путь из A в B.

$$\begin{cases} yt = 12, \\ x(t+0,2) = 12 - 0,4y, \\ t < 1, \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{12}{y}+\frac{1}{5}\right) = 12 - \frac{2y}{5} \Rightarrow 2y^2 + (x-60)y + 60x = 0,$$

$D = x^2 - 600x + 3600 \geq 0;\quad x^2 - 600x + 3600 = 0,\ D/4 = 86400,\ x_{1/2} = 300 \pm 120\sqrt{6}.$

Поскольку $\frac{x}{5} < x\left(t+\frac{1}{5}\right) < 12 \Rightarrow x < 60,$ то $x^2 - 600x + 3600 \geq 0$ при $x \leq 300 - 120\sqrt{6} \approx 6,06.$ Отсюда наибольшее возможное целое значение скорости пешехода $x = 6.$ Найдем y при $x = 6: 2y^2 - 54y + 3600 = 0,\ y_1 = 12,\ y_2 = 15.$ Поскольку $t < 1,$ то $y < 12 \Rightarrow y = 15.$

Ответ: 21

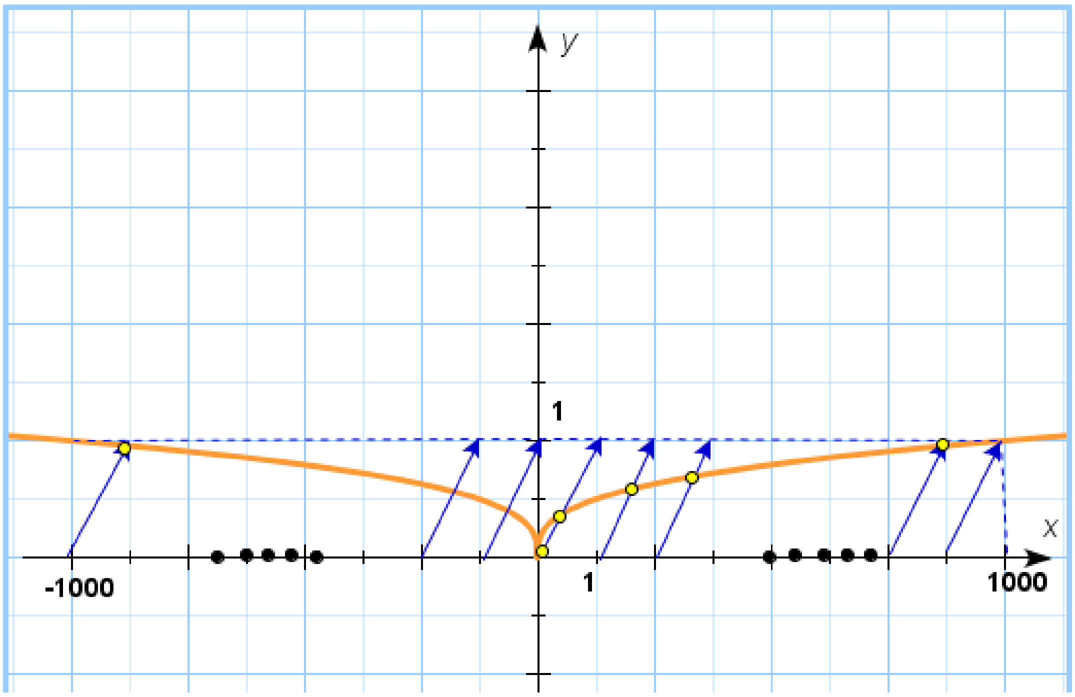
2. Сколько корней имеет уравнение

$\sqrt[3]{|x|} + 10[x] = 10x$? **(**$[x]$ – целая часть числа x, т.е. $[x] \in Z, [x] \leq x < [x] + 1$).

(5 баллов)

Решение:

$\frac{\sqrt[3]{|x|}}{10} = \{x\}, \{x\} = x - [x]$ Поскольку $\{x\} \in [0;\ 1)$, то $x \in (-1000; 1000).$



На промежутке [0; 1) уравнение имеет 2 корня

$\sqrt[3]{x} = 10x, x = 1000x^3, x = 0, x = \sqrt{0{,}001}$. На всех остальных промежутках [n, n+1), где n = -1000, …, -1, 1, …, 999, уравнение имеет один корень. В итоге имеем 2000 корней.

Ответ: 2000

3. Решите неравенство $2\sqrt{x^2}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{6x^2} + \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{3}|x| - \left(\frac{1}{x^2} - 3\right)\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$.

В ответ запишите сумму всех целых значений x, удовлетворяющих этому неравенству. (6 баллов)

Решение. $\left(\arcsin\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\left(2|x| + \frac{1}{x^2} - 3\right) \geq 0,$

1. $\begin{cases} \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \geq 0, \\ 2|x| + \frac{1}{x^2} - 3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1;\, 2], \\ \frac{(2|x|+1)(|x|-1)^2}{x^2} \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1;\, 2].$ Целыми решениями являются 1 и 2.

2. $\begin{cases} \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \leq 0, \\ 2|x| + \frac{1}{x^2} - 3 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2;\, 1], \\ \frac{(2|x|+1)(|x|-1)^2}{x^2} \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$ Целыми решениями являются -1 и 1.

Объединяя решения 1 и 2 случаев, получаем $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$ Их сумма равна 2.

Ответ: 2

4. Сколькими способами можно погрузить семь разных изделий (3 по 2 тонны, 4 по 1 тонне) в два фургона грузоподъемностями 6 т и 5 т, если расположение грузов внутри фургона не важно? (12 баллов)

Решение.

Решение. Груз может распределиться 6+4 или 5+5.

6 тонн	4 тонны	число способов
$2+1+1+1+1$	$2+2$	$C_3^1=3$
$2+2+1+1$	$2+1+1$	$C_3^2\cdot C_4^2=18$
$2+2+2$	$1+1+1+1$	1

5 тонн	5 тонн	число способов
$2+1+1+1$	$2+2+1$	$C_3^1\cdot C_4^3=12$
$2+2+1$	$2+1+1+1$	$C_3^2\cdot C_4^1=12$

Ответ: 46

5. Числа от 100 до 999 выписаны без пробелов. С каким остатком полученное 2700-значное число делится на 7? (12 баллов)

Решение.

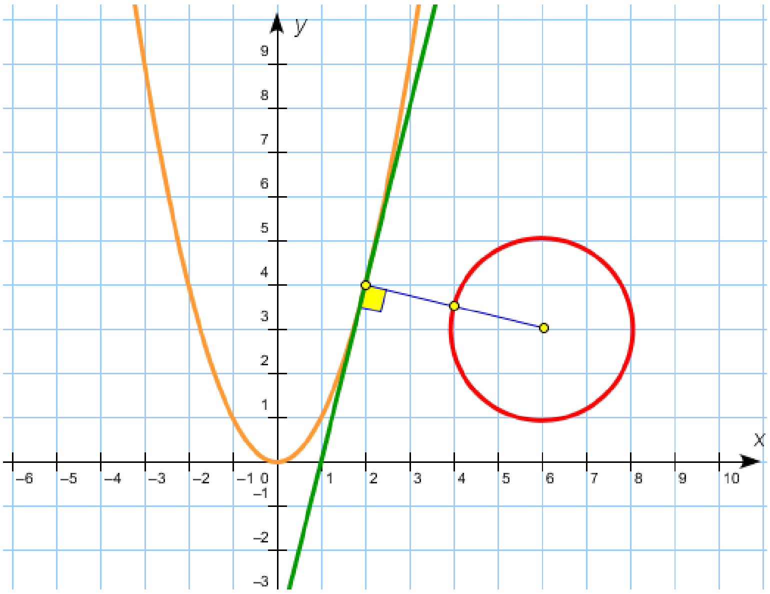
Поскольку 1001 делится на 7, получаем $1000\equiv -1 (\mathrm{mod}\ 7) \implies 1000^n \equiv (-1)^n (\mathrm{mod}\ 7)$. Следовательно, выписанное число сравнимо по модулю 7 с числом

$$999-998+997-996+\ldots+101-100=450\equiv 2(\mathrm{mod}\ 7).$$

Ответ: 2

6. Какое наименьшее расстояние может быть между двумя точками, одна из которых лежит на графике функции $y=x^2$, другая — на кривой, заданной уравнением $4x^2+4y^2-48x-24y+163=0$. В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (12 баллов)

Решение.



Преобразуем уравнение второй кривой, выделив полные квадраты: $(x-3)^2+(y-6)^2=17/4$. Вторая кривая является окружностью с центром в точке (6; 3) и радиусом $\sqrt{17}/2$. Найдем наименьшее расстояние от центра этой окружности до точки, лежащей на параболе $y=x^2$. Квадрат расстояния от точки $(6;\ 3)$ до точки $(x;\ x^2)$ равен $h(x)=(x-6)^2+(x^2-3)^2$. Найдем производную функции $h(x)$:

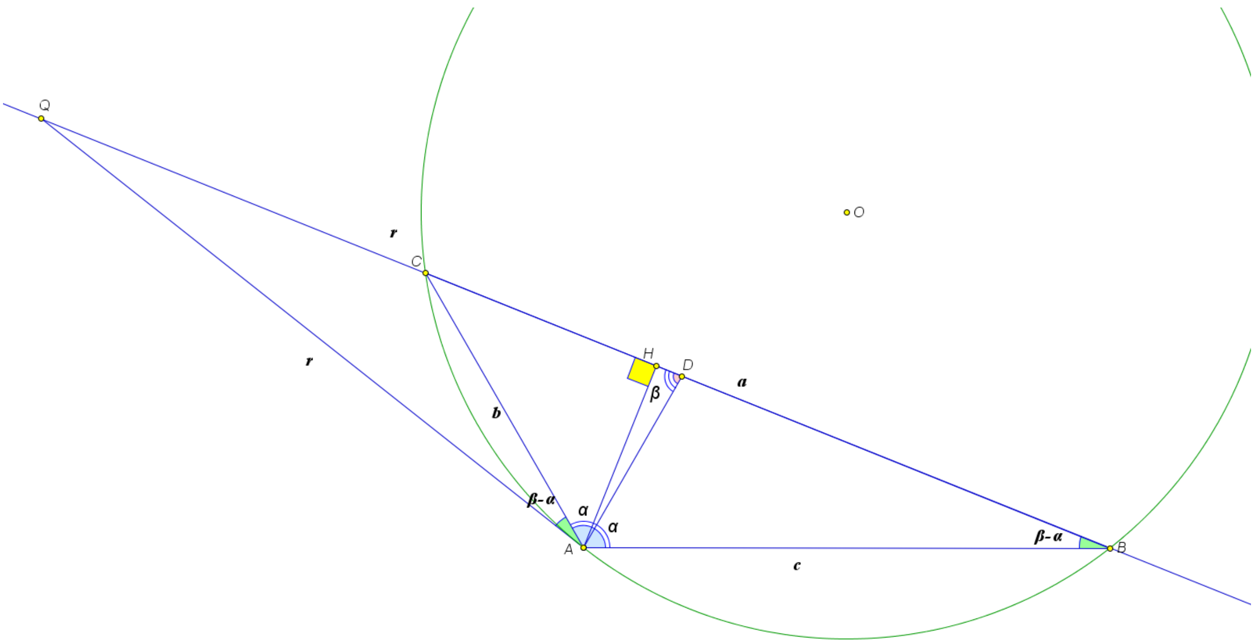
$$h'(x)=2(x-6)+4x(x^2-3)=4x^3-10x-12=(x-2)(4x^2+8x+6)=0,$$

В точке $x=2$ производная равна нулю и меняет знак с минуса на плюс, следовательно. Является точкой минимума функции $h(x)$, $h_{min}=17$. Наименьшее расстояние между точками на параболе и на окружности тогда будет равно $\sqrt{17}/2$, квадрат расстояния равен 17/4 или 4,25.

Ответ: $\mathbf{4,25}$

7. В треугольнике *ABC*, площадь которого равна $180\sqrt{3}$, проведены биссектриса *AD* и высота *AH*. Окружность радиуса $\frac{105\sqrt{3}}{4}$ с центром, лежащим на прямой *BC*, проходит через точки *A* и *D*. Найдите радиус описанной около треугольника *ABC* окружности, если $BH^2 - HC^2 = 768$. (16 баллов)

Решение.



Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, а радиус данной окружности равен r. Заметим, что $\beta > \alpha$ (как внешний угол треугольника *ADC*). Из условия следует, что $c > b$, поэтому $\angle B < \angle C$, или $\beta - \alpha < 180° - \alpha - \beta$, откуда $\beta < 90°$. Поскольку центр *O* окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде *AD*, то точка *O* лежит на луче *DC*. Треугольник *AOD* – равнобедренный, поэтому $\angle OAD = \angle ODA = \beta$, а так как $\beta > \alpha$, то точка *C* лежит между *D* и *O*. Значит, $\angle CAO = \beta - \alpha$. Отсюда следует, что треугольники *ABO* и *CAO* подобны по двум углам. Значит, $BO : AO = AO : CO$, или

$$\frac{r + BD}{r} = \frac{r}{r - CD}. \qquad (1)$$

Поскольку *AD* – биссектриса треугольника *ABC*, то

$$BD = \frac{ac}{b+c}, \qquad CD = \frac{ab}{b+c}.$$

Подставив найденные выражения в равенство (1), получим

$\left(r + \frac{ac}{b+c}\right)\left(r - \frac{ab}{b+c}\right) = r^2$, или $r(c^2 - b^2) = abc$.

По теореме косинусов имеем

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos(ABC),\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(ACB),$$

$$c^2 - b^2 = \quad a(c\cos(ABC) - b\cos(ACB)) = a(BH - HC) = BC(BH - HC) = 768.$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{105\sqrt{3}\cdot 768}{16\cdot 180\sqrt{3}} = 28.$$

Ответ: 28

8. Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $x^2+2x+a^2+2a-5=2\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-ax\right)$ имеет единственное решение. Функция $f(t)$ задается соотношением $f(t)=\frac{\sqrt[3]{(27\cdot t^2+4)(t+2)+32t}}{t-\sqrt{t^2}}$ при всех возможных значениях t.

(16 баллов)

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)$:

. 1. $x \neq 0.$

2. Если $x>0 \Rightarrow x-\sqrt{x^2}=x-|x|=x-x=0$

3. $x<0 \Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt[3]{27x^3+27\cdot 2x^2+36x+8}}{2x}=\frac{\sqrt[3]{(3x+2)^3}}{2x}=\frac{3x+2}{2x}=\frac{3}{2}+\frac{1}{x}.$

Тогда уравнение перепишется в виде

$$x^2+2x+a^2+2a-5=3+2x(1-a) \quad\Rightarrow\quad x^2+2ax+a^2+2a-8=0$$

$$\Rightarrow \quad D/4=8-2a, \quad x_1\cdot x_2=(a-2)(a+4), \quad x_1+x_2=-2a.$$

Единственное решение уравнение имеет, если

1) $D/4=8-2a=0 \Rightarrow a=4,\ x=-4.$

2) $\begin{cases} D/4=8-2a>0, \\ x_1\cdot x_2=(a-2)(a+4)<0, \end{cases} \Rightarrow a\in(-4;2).$

3) $\begin{cases} D/4=8-2a>0, \\ x_1\cdot x_2=(a-2)(a+4)=0, \\ x_1+x_2=-2a<0, \end{cases} \Rightarrow a=2$.

Таким образом, единственное решение возможно при $a\in(-4;2]\cup\{4\}$.

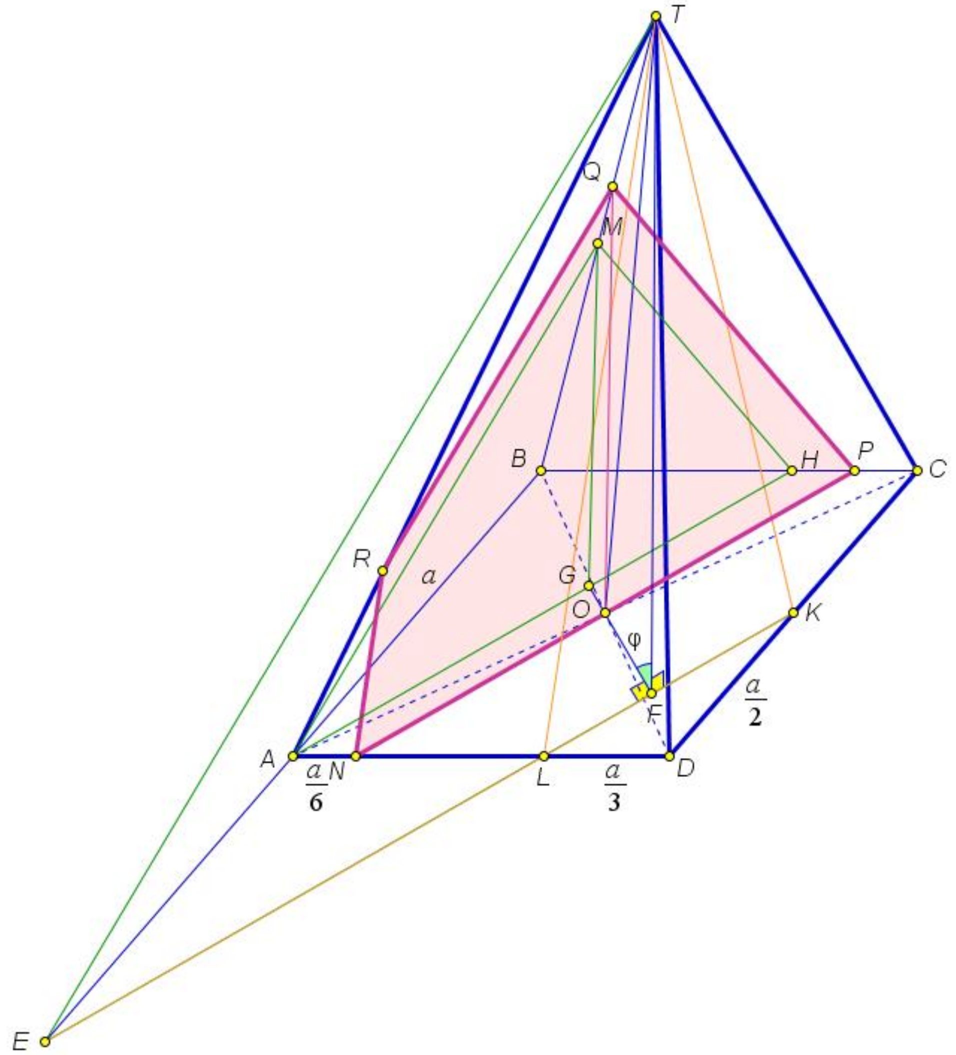
Следовательно, наименьшее целое значение параметра при этом равно -3.

Ответ: -3

9. В правильной четырехугольной пирамиде *TABCD* через центр основания *ABCD* проведено сечение плоскостью параллельно медиане *AM* боковой грани *TAB* и апофеме *TK* боковой грани *TCD*. Найдите объем пирамиды с вершиной в точке *T*, основанием которой является указанное выше сечение, если высота пирамиды *TABCD* равна 12, а расстояние между прямой *AM* и плоскостью сечения равно $\sqrt{3}$.

(16 баллов)

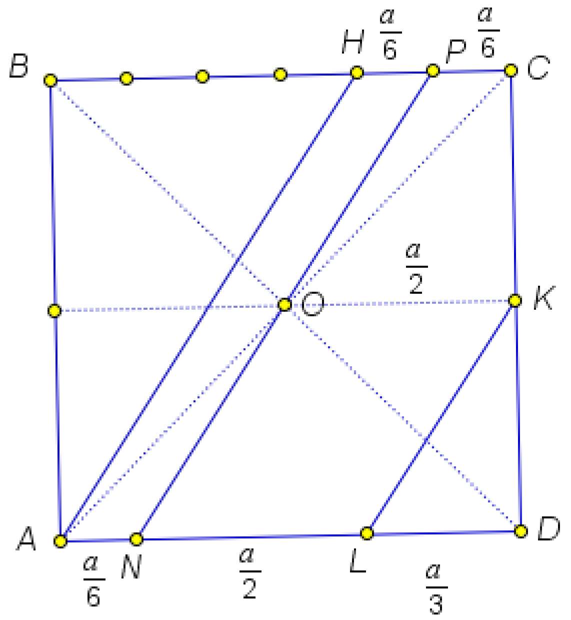
Решение. Обозначим через *a* длину стороны основания пирамиды.



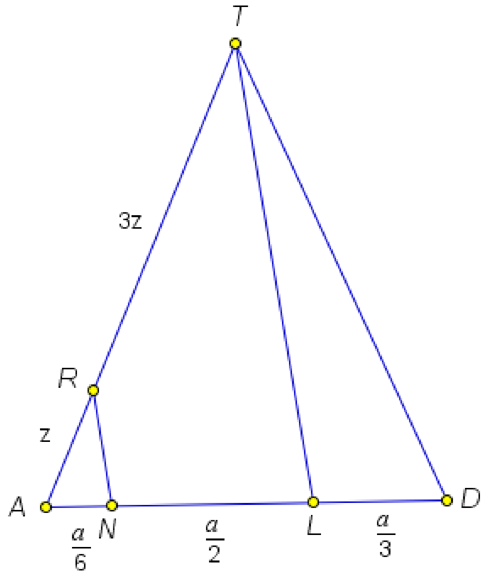
Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через *TK* параллельно *AM*. Для этого через вершину *T* проведем прямую TE $(E \in AB)$, параллельную *AM*. Имеем $AE = AB$. Пусть *L* – точка пересечения прямой *EK* с *AD*. Получили сечение пирамиды плоскостью *TKL*. Плоскость сечения, о котором идет речь в условии задачи и плоскость *TKL* параллельны, следовательно, линии пересечения этих плоскостей с плоскостью основания пирамиды параллельны. Через точку *O* проведем прямую *NP* $(N \in AD, P \in BC)$, параллельную *LK*, через точку *N* проведем прямую NR $(R \in AT)$, параллельную *TL*, через точку *R* проведем прямую RQ $(Q \in TB)$, параллельную *AM*. Четырехугольник *NRQP* – искомое сечение.

Поскольку $AE : DK = 2:1,$ то $AL : LD = 2:1,$ $AL = \dfrac{2a}{3}, LD = \dfrac{a}{3}, AN = PC = \dfrac{a}{6}.$

1)

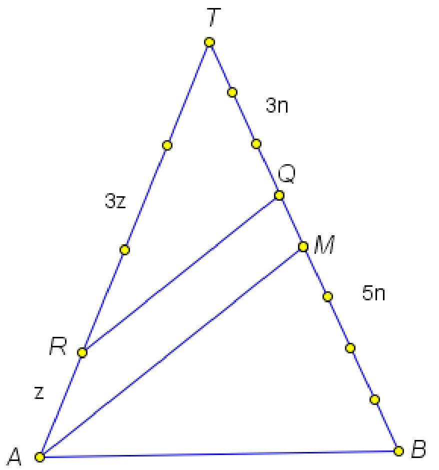


2)



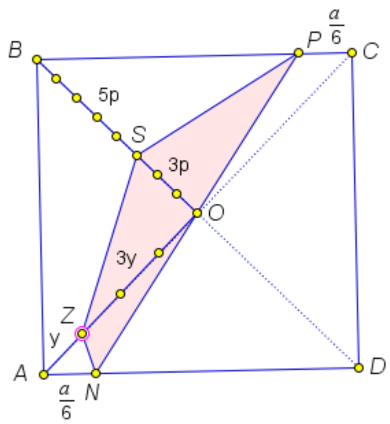
$NR \parallel LT$, $AN : NL = 1:3$, $AR : RT = 1:3$.

3)



$RQ \parallel AM$, $AR : RT = 1:3$, $TQ : QB = 3:5$.

4) Спроецируем сечение $NRQP$ на плоскость основания.

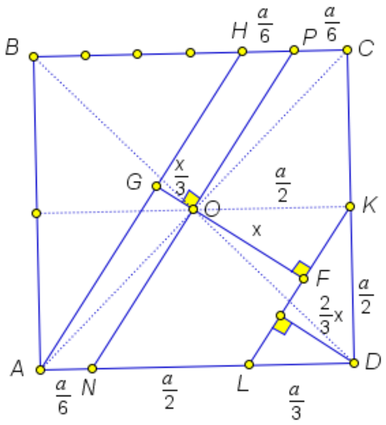


Проекцией точки R является точка Z, точки Q - точка S. $AG : GO = 1:3$, $BS : SO = 5:3$.

Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания:

$$S_{пр} = \frac{a^2}{2} - \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{69a^2}{384}.$$

5) Найдем косинус угла φ между плоскостью сечения и основанием. Проведем $OF \perp LK$ $(F \in LK)$. Обозначим OF через x.



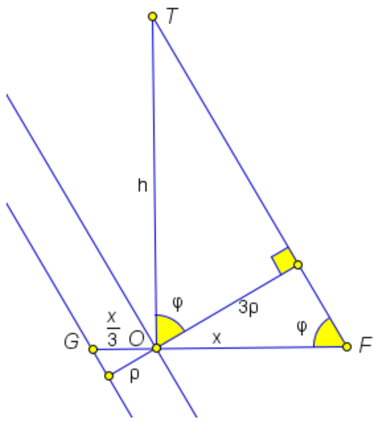
$$\frac{2x}{3}=\frac{\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{4}}},\ x=\frac{3a}{2\sqrt{13}}.$$

6)

Если ρ - расстояние между AM и плоскостью сечения, то расстояние от точки O до плоскости TLK равно 3ρ,

и $\cos\varphi=\frac{3\rho}{h}=\frac{3\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$,

$x=\frac{3a}{2\sqrt{13}}=\frac{3\rho}{\sin\varphi}$, $a=8\sqrt{3}$.



7) $S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{4\cdot 69a^2}{384\sqrt{3}}=\frac{138}{\sqrt{3}}.$

8) $V_{TNRQP}=\frac{1}{3}S_{сеч}\cdot 3\rho=138.$

Ответ: 138.