Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Профиль: компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике
Вариант: 2 Класс: 11

Задача 1 (10 *баллов*). Решите уравнение

$$(x+y)^2+3x^2+1+\sqrt{8x^2+8xy+4y^2-34}=2|2x+y|-2xy.$$

Задача 2 (10 *баллов*). В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если угол BAC равен $\arccos\frac{13}{20}$, а угол ACB равен $\arccos\frac{37}{40}$.

Задача 3 (12 *баллов*). Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $a^2=2(2y+2(a-2)\sin x+\cos 2x+2a-1)$, $\dfrac{\log_2(y+1)}{1+\log_2\sin x}=1$ имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения при каждом из найденных a.

Задача 4а (10 *баллов*). См. лист 2.

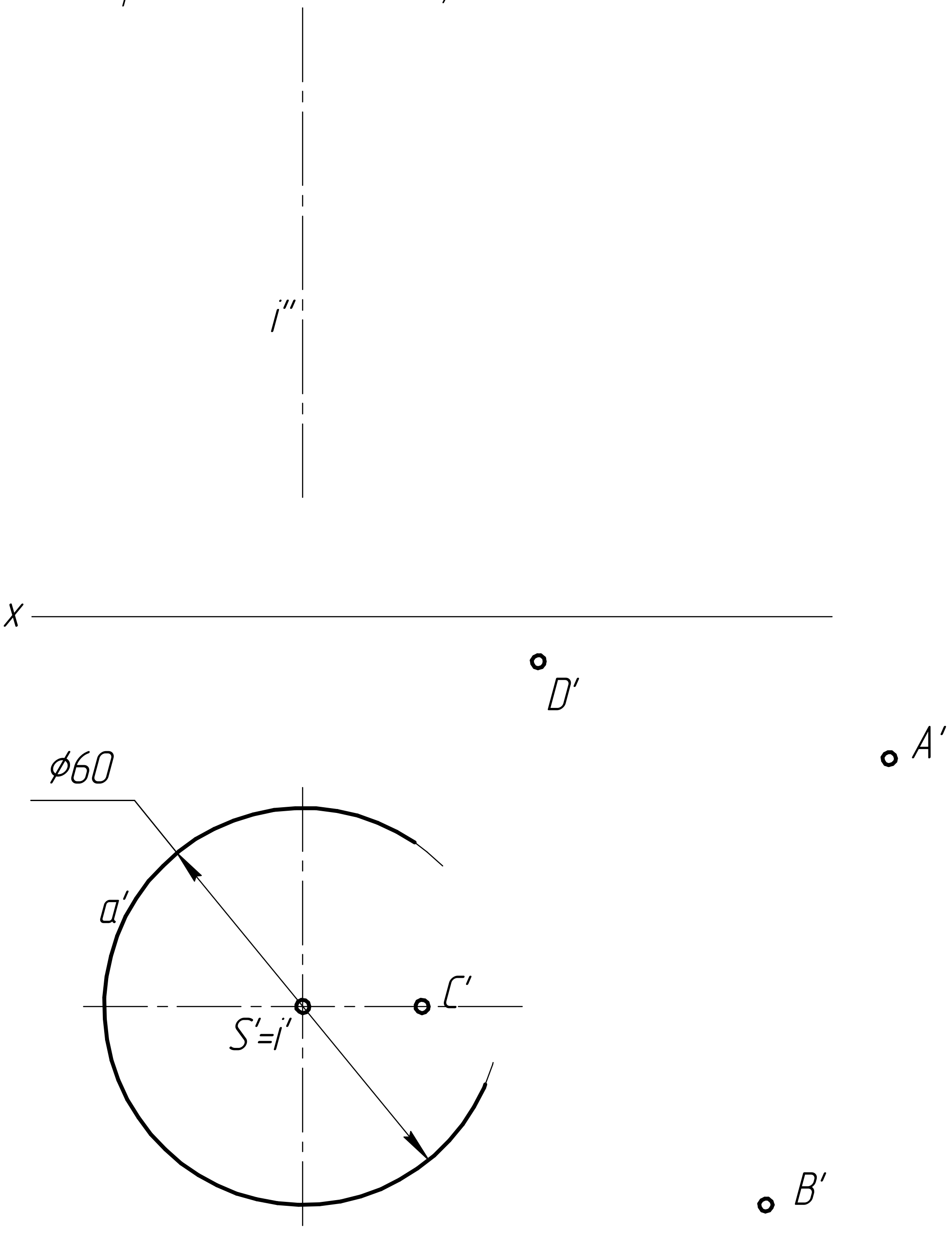
Задача 4б (8 *баллов*). Найдите объем пирамиды $SABCD$ и угол между плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания пирамиды (см. условие задачи 4а), если $AB=70$, $BC=60$, $FD=CD=55$, угол BAD равен 90°, а угол между прямой BC и прямой, проходящей через основание O высоты пирамиды $SABCD$ и вершину C, равен 30°, $OL=14$, где L – горизонтальная проекция точки пересечения SC с плоскостью основания конуса.

Задача 5 (20 *баллов*). См. оборот листа 2.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

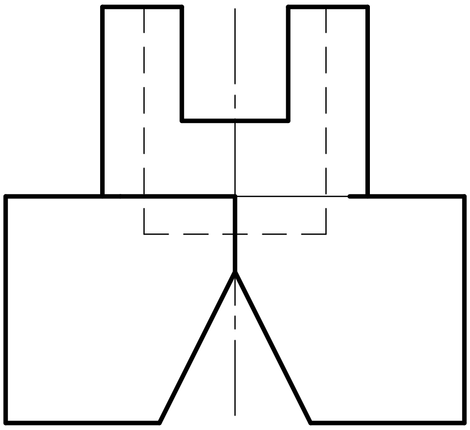
Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

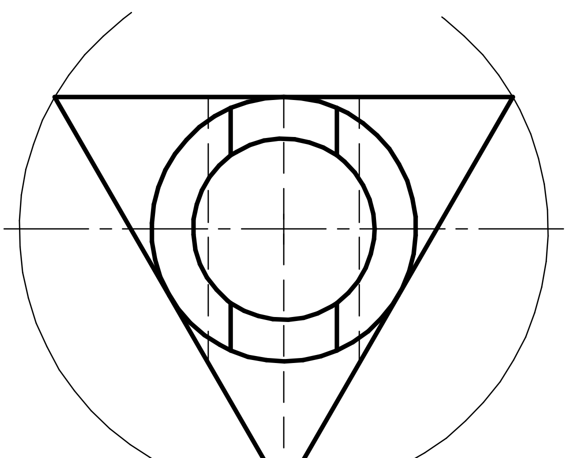
Задача 4а *(10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания прямого кругового конуса* ***a'*** *и вершин основания пирамиды* ***A'B'C'D'****. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания пирамиды принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания конуса параллельна плоскости основания пирамиды и выше ее на 20 мм. Высота конуса 70 мм.*
Требуется:
1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин и границ участков линии;
3) обозначить видимость фигур и линии их пересечения;
4) оформить все изображения по ГОСТ 2.303–306;



Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

Задача 5 (20 баллов). Даны две проекции призмы.
Требуется:
1) на месте вида слева оформить профильный разрез;
2) главный вид оформить как соединение половины вида и половины фронтального разреза;
3) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
6) проставить размеры по ГОСТ 2.307-2011
7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.





Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Компьютерное моделирование и графика
Предмет: Математика и инженерная графика
Класс: 11

Задание 1 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Уравнение сведено к равносильной системе из двух уравнений с двумя переменными.	3
При решении системы не все случаи разобраны, получена половина решений.	5
Допущена одна вычислительная ошибка.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	10

Задание 2 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно найдены отношения сторон треугольника ABC. Правильно использованы свойства биссектрис треугольников для определения соотношений отрезков, необходимых для нахождения площадей нужных треугольников.	3
Верно найдены соотношения для площадей треугольников, необходимые для получения правильного ответа.	5
При решении задачи допущена одна вычислительная ошибка.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	10

Задание 3 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно выполнена замена переменного и определены все ограничения на решения системы, одна переменная правильно выражена через другую, получено верное квадратное уравнение. Верно найден дискриминант квадратного уравнения, выписаны решения, но нет учета ограничений на корни.	3
Частично учтены ограничения на корни, правильно выписаны решения системы.	6
Допущены ошибки при выписывании корней или при определении значений параметра, удовлетворяющих условию задачи, в ответе пропущены или добавлены 1 или 2 значения.	9
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	12

Задание 4a (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие выполненным критериям)	**Балл**
Построена фронтальная и горизонтальная проекции двух фигур	2
Построена линия пересечения фигур	2
Определена видимость очерка конуса	1
Определена видимость очерка пирамиды	1
Определена видимость участков линии пересечения	2
Чертеж оформлен с обозначением проекций вершин и границ участков линии пересечения	2

Задание 4b (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	**Балл**
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Приведены верные рассуждения, выписаны соответствующие формулы, но при вычислении объема или угла допущены вычислительные ошибки.	2
Обоснованно получен один из верных ответов, т.е. либо верно найден требуемый объем, либо угол.	4
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	8

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие выполненным критериям)	**Балл**
Построены три изображения в проекционной связи. На видах невидимый контур показан штриховой линией и на разрезах линии невидимого контура не обозначены	4
Главный вид выполнен как соединение половины вида и половины фронтального разреза А-А с обозначением разреза и указанием волнистой линии разделения вида и разреза	4
Вид слева выполнен как простой полный профильный разрез (без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза)	5
Вид сверху выполнен без разреза	2
Обозначены более половины необходимых размеров	4
Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии ЕСКД	1

Решение варианта №2 (Математика - 11 класс)

1. Решите уравнение

$$(x+y)^2+3x^2+1+\sqrt{8x^2+8xy+4y^2-34}=2|2x+y|-2xy. \quad \text{(10 баллов)}$$

Решение:

$$4x^2+4xy+y^2+1-2|2x+y|+\sqrt{8x^2+8xy+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow$$

$$(2x+y)^2-2|2x+y|+1+\sqrt{8x^2+8xy+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow$$

$$(|2x+y|-1)^2+\sqrt{8x^2+8xy+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow \text{(оба слагаемые неотрицательны)}$$

$$(|2x+y|-1)^2=0 \text{ и } \sqrt{8x^2+8xy+4y^2-34}=0 \Leftrightarrow$$

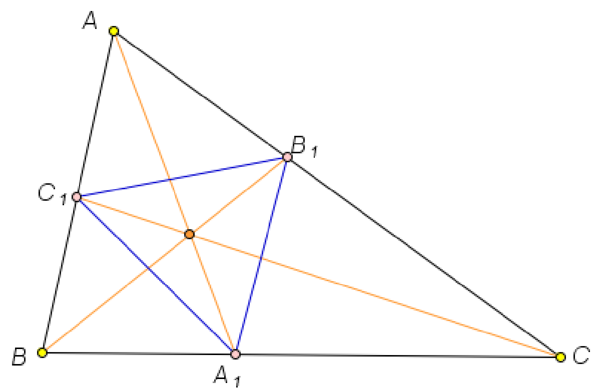
$$\begin{cases} |2x+y|=1, \\ 8x^2+8xy+4y^2-34=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+y=1, \\ 2x+y=-1, \end{array}\right. \\ 8x^2+8xy+4y^2-34=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1-2x, \\ y=-1-2x, \end{array}\right. \\ 8x^2+8xy+4y^2-34=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1-2x, \\ 8x^2+8xy+4y^2-34=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1-2x, \\ 8x^2+8xy+4y^2-34=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1-2x, \\ 4x^2-4x-15=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1-2x, \\ 4x^2+4x-15=0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,5,\ y=-4, \\ x=-1,5,\ y=4, \\ x=-2,5,\ y=4, \\ x=1,5,\ y=-4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(2,5;-4)$, $(-2,5;4)$, $(1,5;-4)$, $(-1,5;4)$.

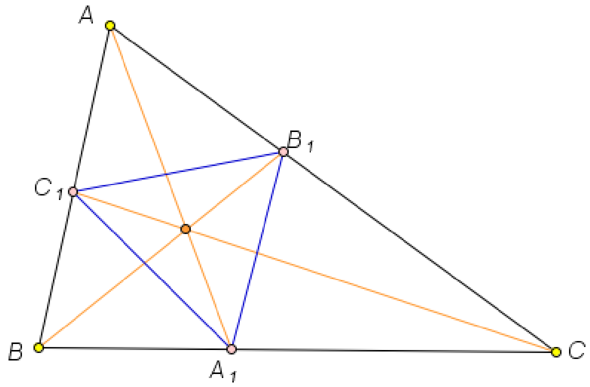
2 В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если угол BAC равен $\arccos\frac{13}{20}$, а угол ACB равен $\arccos\frac{37}{40}$. (10 баллов)



Решение.

$\alpha = \angle BAC = \arccos\frac{13}{20}, \gamma = \angle ACB = \arccos\frac{37}{40},$

$a = BC, b = AC,\ c = AB.$



$$\cos\alpha = \frac{13}{20},\qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{231}}{20},$$

$$\cos\gamma = \frac{37}{40},\qquad \sin\gamma = \frac{\sqrt{231}}{40}.$$

По теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},\qquad \frac{20a}{\sqrt{231}} = \frac{40c}{\sqrt{231}},\qquad a = 2c.$$

$$\sin\beta = \sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma = \frac{\sqrt{231}}{20}\cdot\frac{37}{40} + \frac{13}{20}\cdot\frac{\sqrt{231}}{40} = \frac{\sqrt{231}}{16},$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},\qquad \frac{16b}{\sqrt{231}} = \frac{40c}{\sqrt{231}},\qquad b = \frac{5}{2}c.$$

$a = BC = 4x, b = AC = 5x,\ c = AB = 2x,\ AB{:}BC{:}AC = 2{:}4{:}5.$

По свойствам биссектрис имеем

$$AC_1 = \frac{bc}{a+b} = \frac{10x}{9},\qquad BC_1 = \frac{ac}{a+b} = \frac{8x}{9},$$

$$BA_1 = \frac{ac}{b+c} = \frac{8x}{7},\qquad CA_1 = \frac{ab}{b+c} = \frac{20x}{7},$$

$$AB_1 = \frac{bc}{a+c} = \frac{5x}{3},\qquad CB_1 = \frac{ab}{a+c} = \frac{10x}{3},$$

$$S_{C_1AB_1} = \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC},\quad S_{C_1BA_1} = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{7}S_{ABC},\qquad S_{A_1CB_1} = \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}S_{ABC},$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \left(1 - \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3} - \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{7} - \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}\right)S_{ABC} = \frac{40}{189}S_{ABC}.$$

Ответ: $\mathbf{\frac{189}{40}}$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $a^2 = 2(2y + 2(a-2)\sin x + \cos 2x + 2a - 1),\ \dfrac{\log_2(y+1)}{1+\log_2\sin x} = 1$ имеет хотя бы одно решение.

Укажите эти решения при каждом из найденных a. (12 баллов)

Решение:

Замена $t = \sin x,\ 0 < t \le 1,\ t \ne 0{,}5$. Второе уравнение системы сводится к уравнению $y + 1 = 2t.$ Подставляя $y = 2t - 1, \sin x = t$ в первое уравнение, получаем:

$a^2 = 2(4t - 2 + 2(a-2)t + 1 - 2t^2 + 2a - 1),$ или уравнение

$$4t^2 - 4at + a^2 - 4a + 4 = 0\ (*),$$

у которого $D/4 = 4a^2 - 4a^2 + 16 \cdot a - 16 = 16(a-1)$.

Очевидно, при $a < 1$ уравнение решений не имеет.

При $a = 1$ дискриминант уравнения равен нулю, корень $t = \dfrac{a}{2} = 0{,}5$ не удовлетворяет ограничениям, и при $a = 1$ система не имеет решений.

Выясним, при каких значениях параметра a уравнение (*) имеет корень $t = 0{,}5$. Подставляя $t = 0{,}5$ в уравнение (*), приходим к уравнению $a^2 - 6a + 5 = 0,$ и $a = 1, a = 5.$ При $a = 1$ система не имеет решений, найдем решения уравнения (*) при $a = 5$: $4t^2 - 20t + 9 = 0, t = 4{,}5, t = 0{,}5.$ Корень $t = 4{,}5$ не удовлетворяет условию $0 < t \le 1$, и система не имеет решений при $a = 5$.

Обозначим $f(t) = 4t^2 - 4at + a^2 - 4a + 4.$ Тогда $f(0) = (a-2)^2,\ f(1) = a^2 - 8a + 8.$

При $a \ne 2$ имеем $f(0) > 0,$ и уравнение (*) будет иметь два различных решения, удовлетворяющих условиям $0 < t \le 1,\ t \ne 0{,}5$, если $a > 1,\ 0 < \dfrac{a}{2} < 1,\ f(1) \ge 0,$ т.е. при $a \in \left(1; 4 - 2\sqrt{2}\right].$ Решениями уравнения (*) при этом будут $t_{1/2} = \dfrac{a \pm 2\sqrt{a-1}}{2},\ x = (-1)^n \arcsin\dfrac{a \pm 2\sqrt{a-1}}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ y = a \pm 2\sqrt{a-1} - 1.$

При $a = 2$ имеем $f(0) = 0,\ f(1) < 0, t_в = \dfrac{a}{2} = 1.$ Уравнения (*) не имеет решений, удовлетворяющих условиям $0 < t \le 1,\ t \ne 0{,}5$.

При $a \ne 2$ имеем $f(0) > 0,$ и уравнение (*) будет иметь одно решение, удовлетворяющее условиям $0 < t \le 1,\ t \ne 0{,}5$, если $f(1) < 0$, т.е. при $a \in (4 - 2\sqrt{2};\ 2) \cup (2; 5) \cup (5;\ 4 + 2\sqrt{2}).$ При $a = 4 + 2\sqrt{2}$ имеем $f(0) > 0,\ f(1) = 0, t_в = \dfrac{a}{2} > 1,$ уравнение (*) будет иметь одно решение $t = 1.$ Итак, при $a \in (4 - 2\sqrt{2};\ 2) \cup (2; 5) \cup (5;\ 4 + 2\sqrt{2}]$ решение уравнения (*) будет $t = \dfrac{a - 2\sqrt{a-1}}{2},$ и $x = (-1)^n \arcsin\dfrac{a - 2\sqrt{a-1}}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ y = a - 2\sqrt{a-1} - 1.$

Ответ:

$a \in \left(1; 4 - 2\sqrt{2}\right],\ x = (-1)^n \arcsin\dfrac{a \pm 2\sqrt{a-1}}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ y = a \pm 2\sqrt{a-1} - 1;$

$a \in (4 - 2\sqrt{2};\ 2) \cup (2; 5) \cup (5;\ 4 + 2\sqrt{2}],$

$x = (-1)^n \arcsin\dfrac{a - 2\sqrt{a-1}}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ y = a - 2\sqrt{a-1} - 1.$

4б. Задача 4б (8 *баллов*). Найдите объем пирамиды $SABCD$ и угол между плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания пирамиды (см. условие задачи 4а), если $AB = 70,\ BC = 60,\ \ AD = CD = 55,$ угол BAD равен 90°, а угол между прямой BC и прямой, проходящей через основание O высоты пирамиды $SABCD$ и вершину $C,$ равен 30°, $OL = 14,$ где L – горизонтальная проекция точки пересечения SC с плоскостью основания конуса.

Решение:

Найдем площадь основания пирамиды. По теореме Пифагора имеем $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{70^2 + 55^2} = 5\sqrt{317}$.

По теореме косинусов имеем ($\alpha = \angle BCD$)

$$\cos\alpha = \frac{CD^2 + CB^2 - BD^2}{2CD \cdot CB} = \frac{55^2 + 60^2 - 7925}{6600} = -\frac{13}{66}.$$

Найдем $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{4187}}{66}$. Тогда

$$S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}\left(CD \cdot CB\sin\alpha + AD \cdot BD\right) = \frac{1}{2}\left(3300\frac{\sqrt{4187}}{66} + 3850\right) =$$

$$= 25\sqrt{4187} + 1925.$$

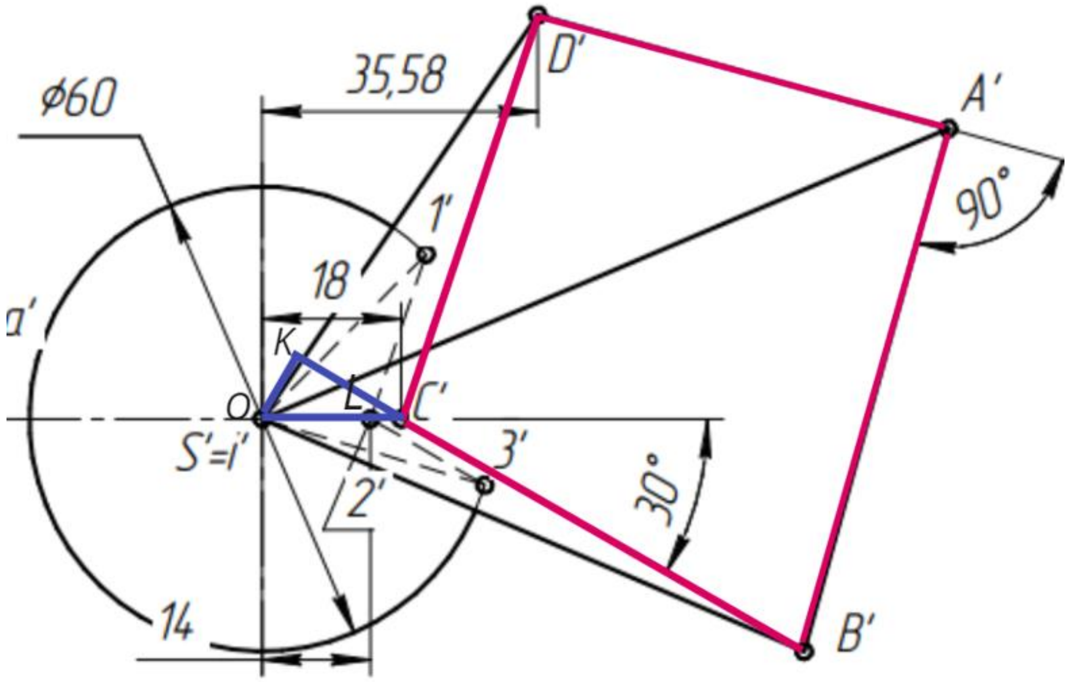
$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}H = 30\left(25\sqrt{4187} + 1925\right) = 750\left(\sqrt{4187} + 77\right).$$

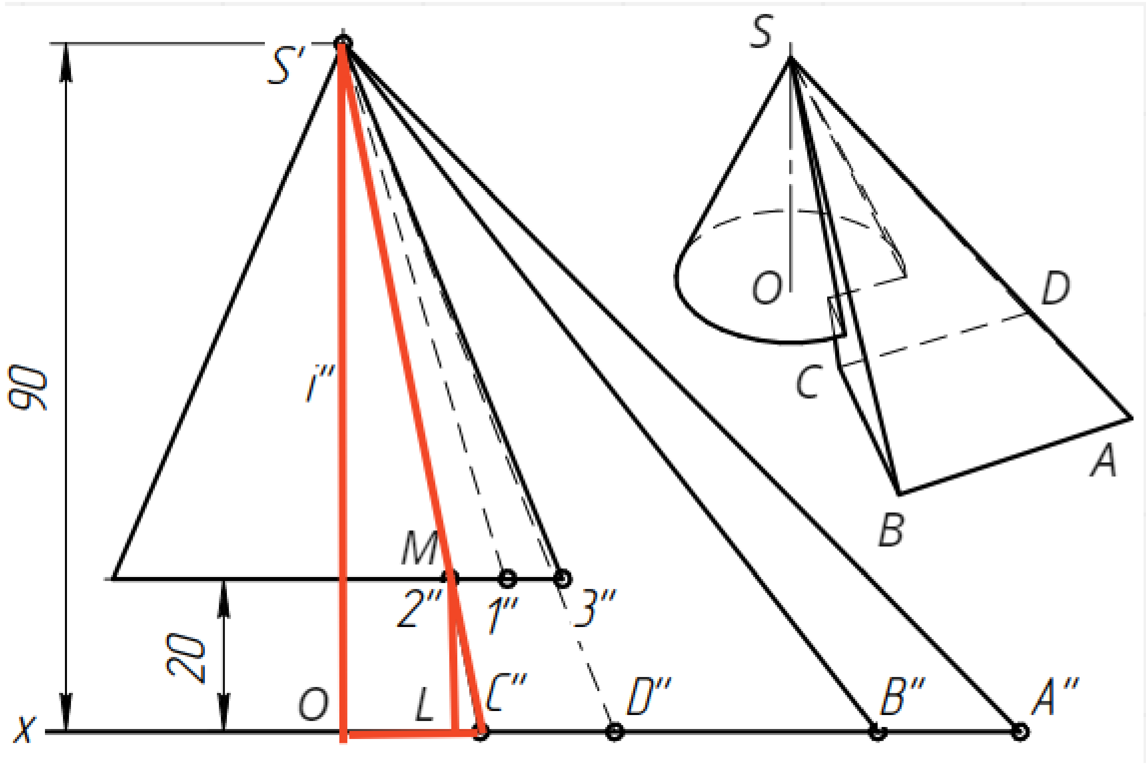
Найдем угол между плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания. Из подобия треугольников SOC и $MLC,$ M - точка пересечения SC с плоскостью основания конуса, имеем $\dfrac{SO}{ML} = \dfrac{OC}{LC},\ \ \dfrac{90}{20} = \dfrac{OC}{OC - 14},\ OC = 18.$

Пусть OK- отрезок перпендикуляра, проведенного из точки O, основания высоты пирамиды, к прямой BC. Тогда $OK = OC\sin 30^\circ = 9.$

Пусть β- угол наклона между плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания. Тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{SO}{OK} = \dfrac{90}{9} = 10,\quad \beta = \operatorname{arctg}10.$

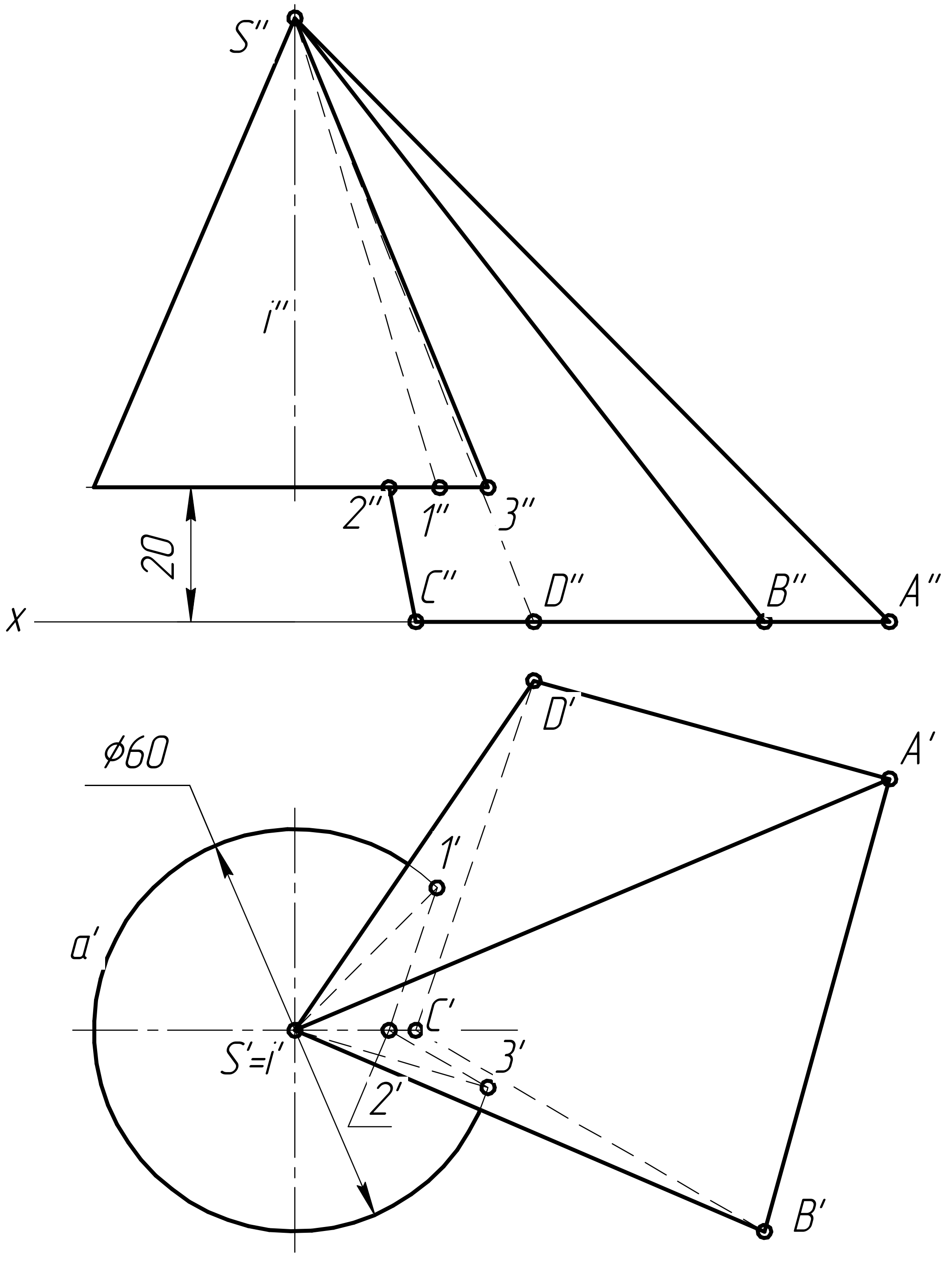
Ответ: $V_{SABCD} = 750\left(\sqrt{4187} + 77\right),\ \operatorname{arctg}10.$


D′
35,58
A′
ϕ60
1′
90°
18
a′
K
O
L
C′
S′=i′
3′
2′
30°
14
B′


S′
S
90
i″
O
D
C
A
B
M
2″
1″
3″
20
X
O
L
C″
D″
B″
A″

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 2 *класс: 10–11*

Задача 4а *(10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания прямого кругового конуса **a'** и вершин основания пирамиды **A'B'C'D'**. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания пирамиды принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания конуса параллельна плоскости основания пирамиды и выше ее на 20 мм. Высота конуса 70 мм.*
Требуется:
1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин и границ участков линии;
3) обозначить видимость фигур и линии их пересечения;
4) оформить все изображения по ГОСТ 2.303–306;



Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант:2 класс: 10–11

Задача 5 (20 баллов). Даны две проекции призмы.
Требуется:
1) на месте вида слева оформить профильный разрез;
2) главный вид оформить как соединение половины вида и половины фронтального разреза;
3) все изображения оформить по ГОСТ 2.305–2008;
4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;
5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;
6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011
7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.