10-й класс

№1: Упрощение-уравнение-неравенство.

Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет один корень. Кроме того, уравнение

$$f(3x+4)+f(-2x+14)=0$$

имеет корень. Найти корень квадратного трехчлена $f(2x+2)$.

Решение:

Из условия получаем, что $f(x)=a(x-x_0)^2$, $a\neq 0$. Уравнение имеет вид

$$f(3x+4)+f(-2x+14)=a(3x+4-x_0)^2+a(-2x+14-x_0)^2=0.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x+4-x_0=0 \\ -2x+14-x_0=0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x_0=10$. Следовательно, корень квадратного трехчлена $f(2x+2)$ есть 4.

Ответ: 4

№2: Движение-работа

Бригада сезонных рабочих планировала собрать за некоторый срок 240ц картофеля, работая с постоянной производительностью. В течение этого срока шли сильные дожди, вследствие чего плановое задание ежедневно недовыполнялось на 2ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно перевыполнять норму на 2ц, и плановое задание было выполнено на 2 дня раньше срока. Сколько центнеров картофеля планировалось собирать ежедневно?

Решение:

Пусть t – плановый срок работы, а n – количество центнеров картофеля, которое планировалось собирать по плану. Тогда по условию задачи можно составить систему уравнений $\begin{cases} \frac{t}{3}(n-2)+(\frac{2t}{3}-2)(n+2)=240 \\ t\cdot n=240 \end{cases}$. Преобразуем первое уравнение системы и выразим из него t через n: $\frac{nt}{3}-\frac{2t}{3}+\frac{2nt}{3}-2n+\frac{4t}{3}-4=240$; $240+\frac{2t}{3}-2n-4=240$; $t=\frac{3}{2}(2n+4)=3n+6$.Подставим полученное выражение во второе уравнение системы:

$n(3n+6)=240; n^2+2n-80=0;\ \frac{D}{4}=81; n_{1,2}=\left[\begin{array}{l}8\\-10\end{array}\right.$. Число n положительно по смыслу задачи.

Ответ: 8

№3: Треугольники.

1. В треугольнике ABC угол C прямой, CD – высота. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC, если длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 6 и 8 соответственно. **Ответ:** 10

№4: Прогрессия.

Числа 5x-y; 2x+3y; x+2y – последовательные члены арифметической прогрессии. Числа $(y+1)^2$; xy+1; $(x-1)^2$ – последовательные члены геометрической прогрессии. Найдите числа x и y. Если таких значений несколько, то в ответ, округлив до целого числа, выпишите отрицательную сумму x+y.

Ответ: -1

№5: Проценты.

Фляга полностью наполнена 96%-ным раствором соляной кислоты (по объёму). Из неё отлили 12 л раствора, дополнили флягу до краёв водой и перемешали. Затем из фляги отлили ещё 18 л получившегося раствора, снова полностью дополнили её водой и перемешали. После чего концентрация кислоты во фляге составила 32%. Найдите объём фляги (в литрах)?

Ответ: 36

№6: Множество

Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{x+3,3}+\sqrt{x+11,3}+\sqrt{x+27,3}}{\sqrt{x+2,3}+\sqrt{x+6,3}+\sqrt{x+18,3}}=\dfrac{3}{2}$. В ответе укажите корень или сумму корней, если их несколько.

Решение:

Перепишем уравнение в виде $2(\sqrt{x+3,3}+\sqrt{x+11,3}+\sqrt{x+27,3})=3(\sqrt{x+2,3}+\sqrt{x+6,3}+\sqrt{x+18,3})$, а затем в виде

$$2(\sqrt{x+3,3}-\sqrt{x+2,3}+\sqrt{x+11,3}-\sqrt{x+6,3}+\sqrt{x+27,3}-\sqrt{x+18,3})=\sqrt{x+2,3}+\sqrt{x+6,3}+\sqrt{x+18,3}$$

Обозначим левую часть уравнения $f(x)$, а правую $g(x)$. $g(x)$ монотонно возрастает на интервале $[-2,3;+\infty)$ как сумма трёх возрастающих функций. Преобразуем левую часть - $f(x)$.

$$f(x)=2\left(\frac{1}{\sqrt{x+3,3}+\sqrt{x+2,3}}+\frac{5}{\sqrt{x+11,3}+\sqrt{x+6,3}}+\frac{9}{\sqrt{x+27,3}+\sqrt{x+18,3}}\right).$$

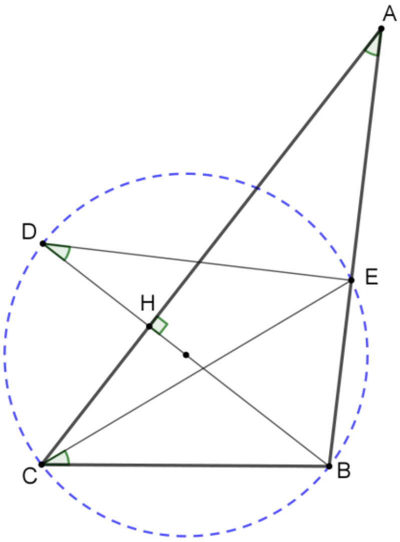
$f(x)$ является монотонно убывающей на $[-2,3;+\infty)$ как сумма монотонно убывающих функций. Следовательно, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня. Заметим, что $f(-2,3)=g(-2,3)$, следовательно $x=-2,3$ - единственный корень уравнения.

Ответ: -2,3

№7: Окружности.

В треугольнике ABC проведена высота BH. Окружность с центром, лежащим на высоте BH, проходит через вершины треугольника B, C и пересекает сторону AB в точке E. Найдите длину отрезка AE, если $AB=8$, $BC=6$.

Решение:



Пусть прямая BH и окружность пересекаются в точке D. Прямоугольные треугольники BHA и BED подобны ($\angle B$ – общий), $\angle BCE = \angle BDE$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу), следовательно, $\angle BAC = \angle BDE = \angle BCE$. Далее, треугольники CBE и ABC подобны (по двум углам: $\angle B$ – общий, $\angle BAC = \angle BCE$).

Из равенства отношений соответствующих сторон находим:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BC}{AB}, BE = \frac{BC^2}{AB} = \frac{36}{8} = 4{,}5.$$

Следовательно, $AE = 8 - 4{,}5 = 3{,}5$.

Ответ: 3,5

№8: Параметр.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a^2 + 13|x-1| + 3\sqrt{4x^2 - 8x + 13} = 3a + 3|4x - 3a - 4|$ имеет хотя бы один корень. В ответе укажите сумму всех целых значений параметра, удовлетворяющих условию задачи.

Решение:

Перепишем уравнение в виде $a^2 - 3a + 3\sqrt{(2x-2)^2 + 9} = 3|4x - 3a - 4| - 13|x-1|$ и рассмотрим функции $f(x) = a^2 - 3a + 3\sqrt{(2x-2)^2 + 9}$ и $g(x) = 3|4x - 3a - 4| - 13|x-1|$, определённые и непрерывные на множестве действительных чисел. График функции $y = g(x)$ представляет собой кусочнолинейную функцию, состоящую из отрезков прямых и лучей. При $x \geq 1$ каждое звено графика является частью прямой вида $y = kx + b$, где $k < 0$ (так как при любом раскрытии первого модуля коэффициент при x будет отрицательным). Следовательно, на промежутке $[1;+\infty)$ функция $y = g(x)$ убывает от $g(0)$ до $-\infty$. Аналогично можно показать, что на интервале $(-\infty;1]$ функция $g(x)$ возрастает от $-\infty$ до $g(0)$. Поэтому в точке $x = 1$ эта функция достигает своего наибольшего значения. $g_{наиб.} = g(1) = 3|3a| = 9|a|$.

На основании свойств монотонных функций функция $f(x)$ принимает наименьшее значение при $x = 1$. $f_{наим.} = f(1) = a^2 - 3a + 9$. На $[1;+\infty)$ $f(x)$ возрастает от $f(0)$ до $+\infty$, а на промежутке $(-\infty;0]$ убывает от $+\infty$ до $f(0)$.

Поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет хотя бы один корень только тогда, когда $f_{наим.} \leq g_{наиб.}$, то есть когда выполняется неравенство $a^2 - 3a + 9 \leq 9|a|$. При $a \geq 0$ получим $a^2 - 3a + 9 \leq 9a;\ a^2 - 12a + 9 \leq 0;\ \dfrac{D}{4} = 36 - 9 = 27$; $a_{1,2} = 6 \pm 3\sqrt{3}$; $a \in \left[6 - 3\sqrt{3}; 6 + 3\sqrt{3}\right]$. При $a < 0$ имеем $a^2 + 6a + 9 \leq 0; (a+3)^2 \leq 0; a = -3$. Таким образом, уравнение имеет хотя бы один корень при $a \in \{-3\} \cup \left[6 - 3\sqrt{3}; 6 + 3\sqrt{3}\right]$. Оценим, между какими целыми числами находятся границы отрезка: $0 < 6 - 3\sqrt{3} < 1;\ \ 11 < 6 + 3\sqrt{3} < 12$. Поэтому на рассматриваемом отрезке находятся целые числа с 1 по 11 включительно. Сложим все целые числа, удовлетворяющие условию задачи: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11-3=63.

Ответ: 63

№9: Делимость.

Найдите наименьшее число из натуральных чисел, превосходящих 2022 и делящих нацело число $2021!! + 2022!!$. (Символом $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих ту же четность: $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \ldots$)

Решение.

Докажем, что $2021!! + 2022!!$ делится на число 2023. Действительно,

$$2022!! = (2023-1)(2023-3)(2023-5)\dots(2023-2021),$$

остаток от деления этого числа на 2023 равен остатку от деления произведения

$$(-1)(-3)(-5)\dots(-2021) = (-1)^{\frac{2022}{2}} \cdot 2021!! = -2021!!$$

на 2023. Следовательно, $2021!! + 2022!!$ делится на число 2023. Так как 2023 – это наименьшее число из натуральных чисел, превосходящих 2022, то получаем ответ.

Ответ. 2023.