



Профиль: компьютерное моделирование и графика;

тур по математике и инженерной графике

Вариант: 2

Класс: 10

Задача 1 (10 баллов). Решите уравнение $(x^2 - 2)^2 = 4x^3 + 4x^2 - 8x$ на промежутке $(1; +\infty)$.

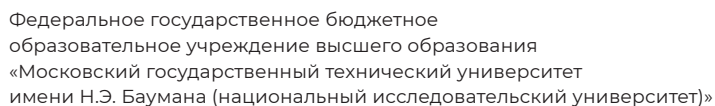
Задача 2 (10 баллов). В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 . Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $AB:BC:AC = 2:4:5$.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений $\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{y-1}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{x-1}} = 1$, $(x-a)^2 = 8(y-x+a) - 15$ имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения при каждом из найденных значений a .

Задача 4а (10 баллов). См. лист 2.

Задача 4б (8 баллов). Найдите объем пирамиды $SABCD$ и угол между плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания пирамиды (см. условие задачи 4а), если $AB = 70$, $BC = 60$, $FD = CD = 55$, угол BAD равен 90° , а угол между прямой BC и прямой, проходящей через основание O высоты пирамиды $SABCD$ и вершину C , равен 30° , $OL = 14$, где L – горизонтальная проекция точки пересечения SC с плоскостью основания конуса.

Задача 5 (20 баллов). См. оборот листа 2.



Задача 4а (10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания прямого кругового конуса α' и вершин основания пирамиды $A'B'C'D'$. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания пирамиды принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания конуса параллельна плоскости основания пирамиды и выше ее на 20 мм. Высота конуса 70 мм.

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин и границ участков линии;
- 3) обозначить видимость фигур и линии их пересечения;
- 4) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;



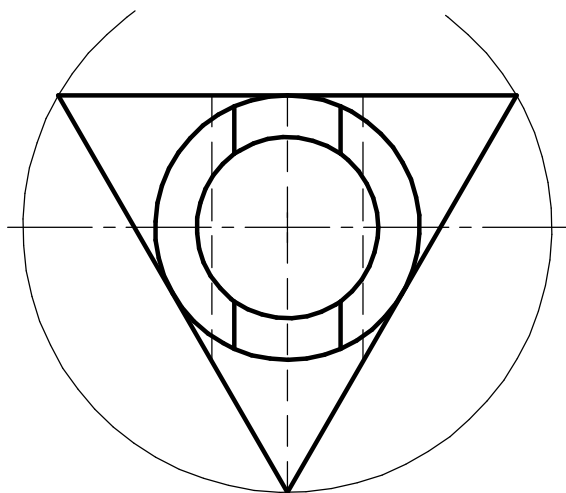
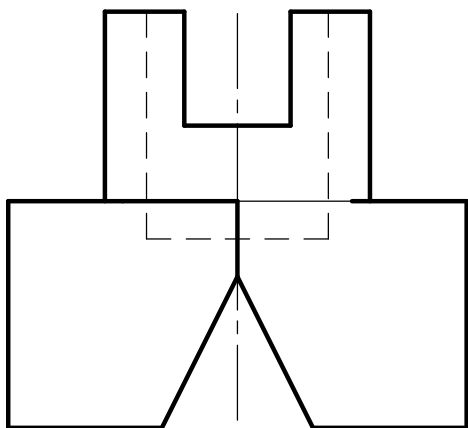


*Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.*

Задача 5 (20 баллов). Даны две проекции призмы.

Требуется:

- 1) на месте вида слева оформить профильный разрез;*
- 2) главный вид оформить как соединение половины вида и половины фронтального разреза;*
- 3) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;*
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;*
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;*
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307-2011*
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.*





Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Компьютерное моделирование и графика

Предмет: Математика и инженерная графика

Класс: 10

Задание 1 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Сделана замена переменного, приводящая к квадратному уравнению.	3
Верно решено квадратное уравнение, полученное после замены.	5
Выполнена обратная замена, получено верное квадратное уравнение, решенное с вычислительной ошибкой, и/или не выбран корень, отвечающий ограничениям.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	10

Задание 2 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Правильно использованы свойства биссектрис треугольников для определения соотношений отрезков, необходимых для нахождения площадей нужных треугольников.	3
Верно найдены соотношения для площадей треугольников, необходимые для получения правильного ответа.	5
При решении задачи допущена одна вычислительная ошибка.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	10

Задание 3 (максимальная оценка 12 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно определены все ограничения на решения системы, одна переменная правильно выражена через другую, получено верное квадратное уравнение. Верно найден дискриминант квадратного уравнения, выписаны решения, но нет учета ограничений на корни.	3
Частично учтены ограничения на корни, правильно выписаны решения системы.	6
Допущены ошибки при выписывании корней или при определении значений параметра, удовлетворяющих условию задачи, в ответе пропущены или добавлены 1 или 2 значения.	9
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	12

Задание 4а (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие выполненным критериям)	Балл
Построена фронтальная и горизонтальная проекции двух фигур	2
Построена линия пересечения фигур	2
Определена видимость очерка конуса	1
Определена видимость очерка пирамиды	1
Определена видимость участков линии пересечения	2
Чертеж оформлен с обозначением проекций вершин и границ участков линии пересечения	2

Задание 4б (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Приведены верные рассуждения, выписаны соответствующие формулы, но при вычислении объема или угла допущены вычислительные ошибки.	2
Обоснованно получен один из верных ответов, т.е. либо верно найден требуемый объем, либо угол.	4
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	8

Задание 5 (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (выбрать соответствие выполненным критериям)	Балл
Построены три изображения в проекционной связи. На видах невидимый контур показан штриховой линией и на разрезах линии невидимого контура не обозначены	4
Главный вид выполнен как соединение половины вида и половины фронтального разреза А-А с обозначением разреза и указанием волнистой линии разделения вида и разреза	4
Вид слева выполнен как простой полный профильный разрез (без указания положения секущей плоскости и обозначения разреза)	5
Вид сверху выполнен без разреза	2
Обозначены более половины необходимых размеров	4
Изображение, толщина линии и штриховка выполнены в соответствии ЕСКД	1

Решение варианта №2 (Математика - 10 класс)

1. Решите уравнение $(x^2 - 2)^2 = 4x^3 + 4x^2 - 8x$ на промежутке $(1; +\infty)$. (10 баллов)

Решение. Раскрытие скобки и приведение подобных приводит к уравнению

$$x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 8x + 4 = 0,$$

которое не имеет рациональных корней и которое не понятно как разложить на простые сомножители. Поэтому преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$(x^2 - 2)^2 - 4x^2 = 4x(x^2 - 2).$$

Поскольку нас интересуют корни $x > 1$, то разделим уравнение на $4x^2$:

$$\frac{(x^2 - 2)^2}{4x^2} - 1 = \frac{x^2 - 2}{x}; \quad \left(\frac{x^2 - 2}{2x}\right)^2 - 1 = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

Делаем замену переменной:

$$\frac{x^2 - 2}{2x} = y, \quad y^2 - 1 = 2y.$$

Решая уравнение $y^2 - 1 = 2y$, находим $y_1 = \sqrt{2} + 1$, $y_2 = -\sqrt{2} + 1$.

И наконец из уравнений

$$\frac{x^2 - 2}{2x} = \sqrt{2} + 1, \quad \frac{x^2 - 2}{2x} = -\sqrt{2} + 1$$

с учетом условия $x > 1$ получаем:

$$x_1 = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{2} + 1 + \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \approx 5,21$, $x_2 = -\sqrt{2} + 1 + \sqrt{5 - 2\sqrt{2}} \approx 1,06$

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 . Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $AB:BC:AC = 2:4:5$. (10 баллов)

Решение.

$$AB:BC:AC = 2:4:5,$$

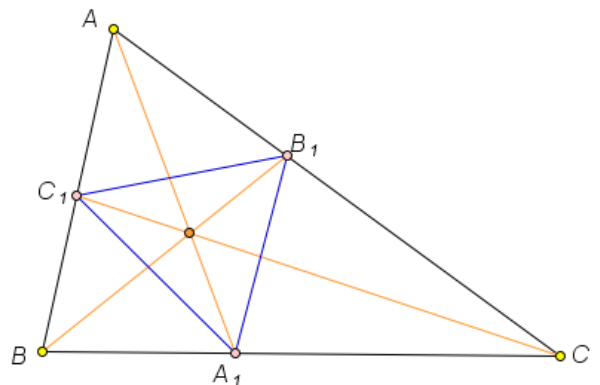
$$a = BC = 4x, b = AC = 5x, c = AB = 2x.$$

По свойствам биссектрис имеем

$$AC_1 = \frac{bc}{a+b} = \frac{10x}{9}, \quad BC_1 = \frac{ac}{a+b} = \frac{8x}{9},$$

$$BA_1 = \frac{ac}{b+c} = \frac{8x}{7}, \quad CA_1 = \frac{ab}{b+c} = \frac{20x}{7},$$

$$AB_1 = \frac{bc}{a+c} = \frac{5x}{3}, \quad CB_1 = \frac{ab}{a+c} = \frac{10x}{3},$$



$$S_{C_1A_1B_1} = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC}, \quad S_{C_1B_1A_1} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7} S_{ABC}, \quad S_{A_1C_1B_1} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} S_{ABC},$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \left(1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3} - \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{7} - \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}\right) S_{ABC} = \frac{40}{189} S_{ABC}.$$

Ответ: $\frac{189}{40}$.

3. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений $\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{y-1}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{x-1}} = 1$,

$(x-a)^2 = 8(y-x+a) - 15$ имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения при каждом из найденных значений a . (12 баллов)

Решение:

Первое уравнение равносильно системе: $x \geq 1$, $x \neq 10$, $y = x$. Подставляя $y = x$ во второе уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 8a - 15$, или $x^2 - 2ax + a^2 - 8a + 15 = 0$ (*), у которого $D/4 = a^2 - a^2 + 8a - 15 = 8a - 15$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Очевидно, при $a < 15/8$ уравнение решений не имеет.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Введем обозначение $f(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 8a + 15$. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{8a-15}$, удовлетворяющих условиям $x \geq 1$, $x \neq 10$, если

$$\begin{cases} 8a-15 > 0, \\ a > 1, \\ f(1) \geq 0, \\ f(10) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a-15 > 0, \\ a > 1, \\ a^2-10a+16 \geq 0, \\ a^2-28a+115 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 15/8, \\ a \in (-\infty; 2] \cup [8; +\infty), \\ a \neq 5, a \neq 23. \end{cases}$$

$$a \in (15/8; 2] \cup [8; 23) \cup (23; +\infty).$$

Рассмотрим уравнение в точках $a = 5$, $a = 23$.

При $a = 5$ получаем $(x-5)^2 = 25$, откуда $x_{1,2} = 5 \pm 5$; корни $x = 0$ и $x = 10$ посторонние, система решений не имеет.

При $a = 23$ получаем $(x-23)^2 = 169$, откуда $x_{1,2} = 23 \pm 13$; корень $x = 10$ – посторонний, второй корень $x = 36$ входит в область допустимых значений системы. При $a = 23$ система уравнений имеет одно решение $x = 36$, $y = 36$.

При $a = 15/8$ дискриминант уравнения равен нулю, уравнение принимает вид $(x-15/8)^2 = 0$, его корень $x = 15/8$ входит в область допустимых значений системы. При $a = 15/8$ система уравнений имеет одно решение $x = 15/8$, $y = 15/8$.

При $a \in (2; 8)$, $a \neq 5$, получаем $f(1) < 0$, квадратное уравнение (*) будет иметь один корень $x = a + \sqrt{8a-15}$, удовлетворяющий условиям $x \geq 1$, $x \neq 10$,

Объединяя найденные значения a , получим ответ.

Ответ: $a \in (15/8; 2] \cup [8; 23) \cup (23; +\infty)$, $x = a \pm \sqrt{8a-15}$, $y = a \pm \sqrt{8a-15}$;

$a \in (2; 8)$, $a \neq 5$, $x = y = a + \sqrt{8a-15}$; $a = 15/8$, $x = 15/8$, $y = 15/8$; $a = 23$, $x = 36$, $y = 36$.

46. Задача 46 (8 баллов). Найдите объем пирамиды $SABCD$ и угол между плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания пирамиды (см. условие задачи 4а), если $AB = 70$, $BC = 60$, $AD = CD = 55$, угол BAD равен 90° , а угол между прямой BC и прямой, проходящей через основание O высоты пирамиды $SABCD$ и вершину C , равен 30° , $OL = 14$, где L – горизонтальная проекция точки пересечения SC с плоскостью основания конуса.

Решение:

Найдем площадь основания пирамиды. По теореме Пифагора имеем $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{70^2 + 55^2} = 5\sqrt{317}$.

По теореме косинусов имеем ($\alpha = \angle BCD$)

$$\cos \alpha = \frac{CD^2 + CB^2 - BD^2}{2CD \cdot CB} = \frac{55^2 + 60^2 - 7925}{6600} = -\frac{13}{66}.$$

Найдем $\sin \alpha = \frac{\sqrt{4187}}{66}$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{A'B'C'D'} &= \frac{1}{2}(CD \cdot CB \sin \alpha + AD \cdot BD) = \frac{1}{2} \left(3300 \frac{\sqrt{4187}}{66} + 3850 \right) = \\ &= 25\sqrt{4187} + 1925. \end{aligned}$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} H = 30(25\sqrt{4187} + 1925) = 750(\sqrt{4187} + 77).$$

Найдем угол между плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания. Из подобия треугольников SOC и MLC , M – точка пересечения SC

с плоскостью основания конуса, имеем $\frac{SO}{ML} = \frac{OC}{LC}$, $\frac{90}{20} = \frac{OC}{OC - 14}$, $OC = 18$.

Пусть OK – отрезок перпендикуляра, проведенного из точки O , основания высоты пирамиды, к прямой BC . Тогда $OK = OC \sin 30^\circ = 9$.

Пусть β – угол наклона между плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания. Тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{SO}{OK} = \frac{90}{9} = 10$, $\beta = \operatorname{arctg} 10$.

Ответ: $V_{SABCD} = 750(\sqrt{4187} + 77)$, $\operatorname{arctg} 10$.

Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.

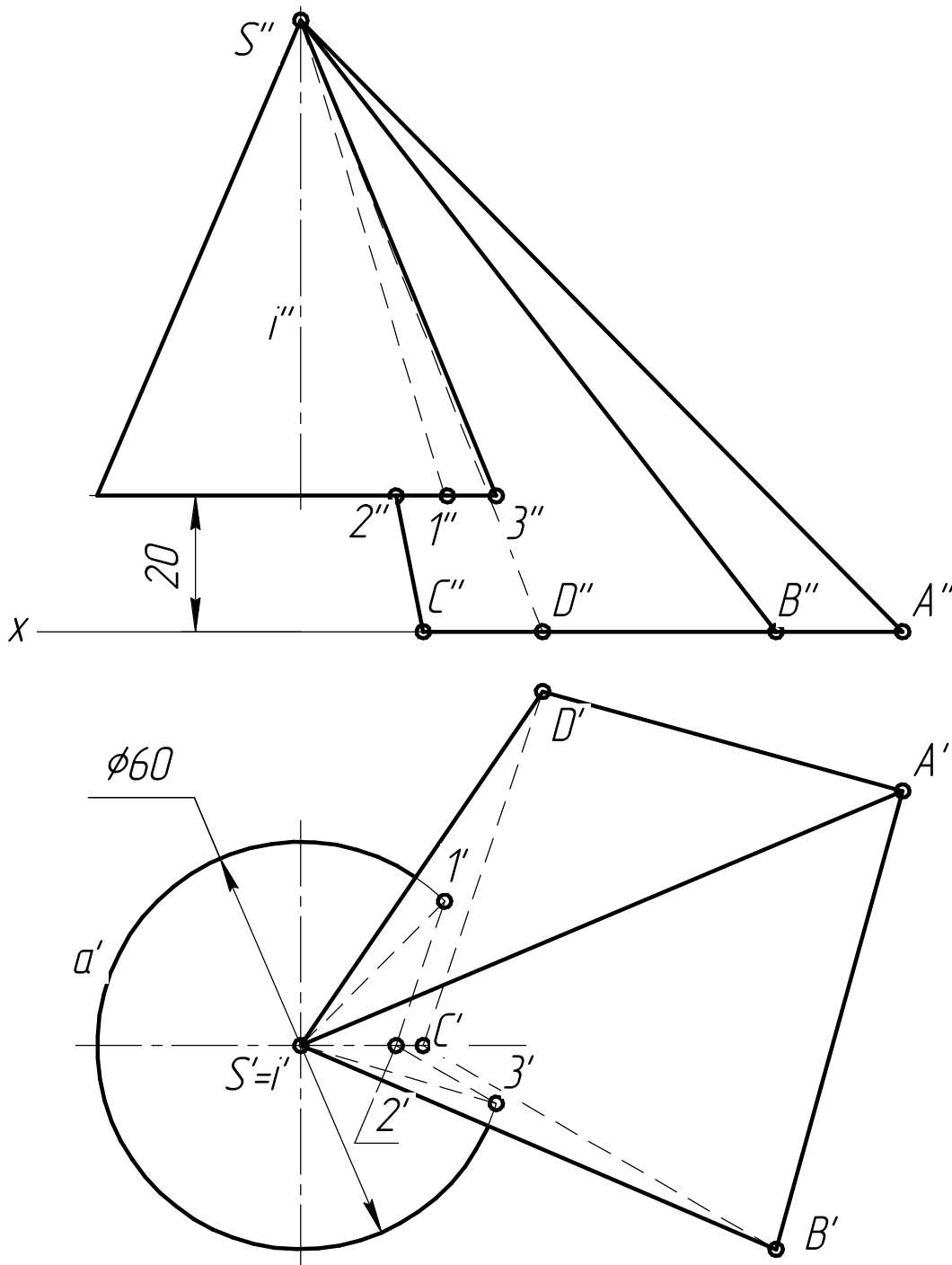
Вариант: 2

класс: 10–11

Задача 4а (10 баллов). Даны горизонтальные проекции основания прямого кругового конуса a' и вершин основания пирамиды $A'B'C'D'$. Вершины фигур совпадают и расположены выше оснований. Плоскость основания пирамиды принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Плоскость основания конуса параллельна плоскости основания пирамиды и выше ее на 20 мм. Высота конуса 70 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух фигур с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции линии пересечения фигур с обозначением вершин и границ участков линии;
- 3) обозначить видимость фигур и линии их пересечения;
- 4) оформить все изображения по ГОСТ 2.303–306;



Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 2 класс: 10–11

Задача 5 (20 баллов). Даны две проекции призмы.

Требуется:

- 1) на месте вида слева оформить профильный разрез;
- 2) главный вид оформить как соединение половины вида и половины фронтального разреза;
- 3) все изображения оформить по ГОСТ 2.305–2008;
- 4) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303–68;
- 5) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306–68;
- 6) проставить размеры по ГОСТ 2.307–2011
- 7) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

