Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

9-й класс

№1: Комбинаторика.

Тест состоит из вопросов с 4 вариантами ответа, только один ответ на каждый вопрос - правильный. С вероятностью 2/3 Илья знает правильный ответ на вопрос, в противном случае он отмечает случайный вариант ответа. Если на какой-то вопрос Илья дал верный ответ, с какой вероятностью ответ на этот вопрос он отгадал? (Ответ округлите до сотых)

Решение:

Правильный ответ Илья мог получить 2 способами:

1) Если он знал этот ответ, то вероятность была $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

2) Если он угадывал ответ на этот вопрос, то вероятность была $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Получаем ответ на задачу: $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{12}} = \frac{1}{9}$

Ответ: 0.11

№2: Параметр.

2. Найти наибольшие значение параметра а, при которых уравнение: $(|x-2| + 2a)^2 - 3(|x-2| + 2a) + 4a(3-4a) = 0$ имеет три решения.

   В ответе укажите наибольшие из них.

Решение:

Пусть $|x-2| + 2a = t$, тогда

$t^2 - 3t + 4a(3-4a) = 0$

$t^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}t + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + 12a - 16a^2 = 0;$

$(t - \frac{3}{2})^2 - (\frac{9}{4} - 12a + 16a^2) = 0;$

$(t - \frac{3}{2})^2 - (4a - \frac{3}{2})^2 = 0;$ $(t - \frac{3}{2} + 4a - \frac{3}{2}) \cdot (t - \frac{3}{2} - 4a + \frac{3}{2}) = 0;$

$(t + 4a - 3) \cdot (t - 4a) = 0$

Получим $(|x-2| + 2a + 4a - 3) \cdot (|x-2| + 2a - 4a) = 0$

$\left[\begin{array}{l} |x-2| + 6a - 3 = 0 \\ |x-2| - 2a = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{6} \cdot |x-2| + \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \cdot |x-2| \end{array}\right.$

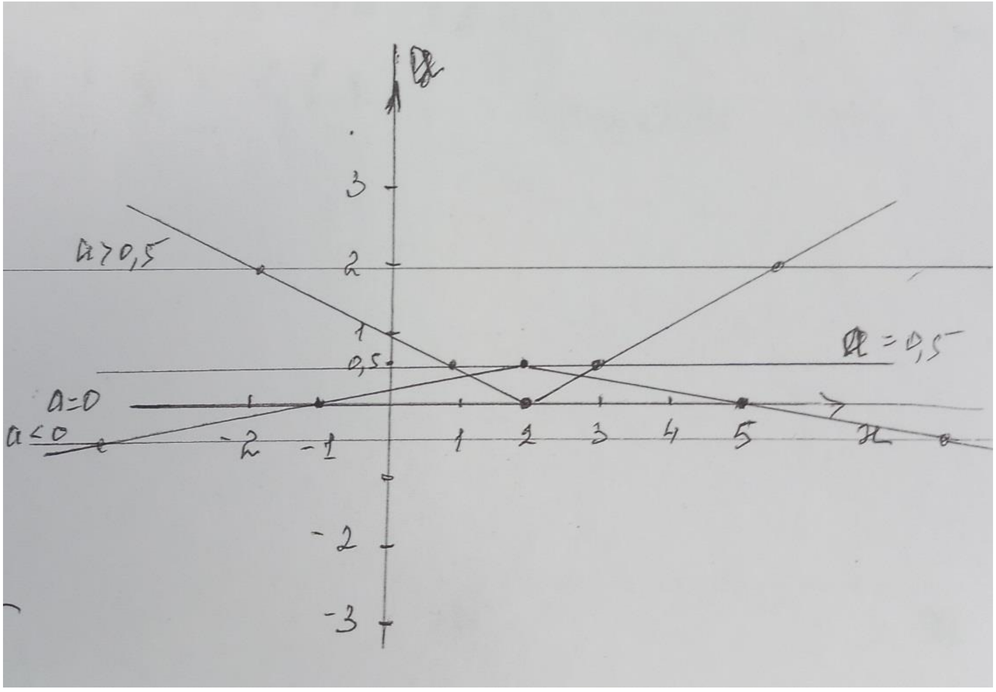
Построим графики уравнений

a = $-\frac{1}{6}$ |x-2| + $\frac{1}{2}$ и

a = $\frac{1}{2}$ |x-2| в системе XOA

Уравнение имеет три решения при

a = 0, a= 0,5



Ответ: 0,5

№3: Треугольники.

В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках P, Q и R. Найдите площадь треугольника PQR, если длины катетов треугольника ABC равны 3 и 4.

Ответ: 1,2

№4: Свойства чисел.

1. Определите какое наименьшее значение может принимать НОК четырёх натуральных чисел, если их сумма равна 2023. **ответ:** 578.

решение. Так как 2023=7·17·17, то подбираем самый удобный вариант. Пусть $x \le y \le к \le e$- натуральные числа, сумма которых равна 2023, и P=НОК(x; y; к; e). Заметим, что что все числа равными быть не могут, так как 2023 не делится на 4.

1. Так как $x \le P$ и $P \vdots x$, то пусть $2x \le P \Rightarrow x \le P/2$, а также $y \le P$; $к \le P$; $e \le P$; $\Rightarrow$

$$x + y + к + e \le 3{,}5P; \Rightarrow P \ge \frac{2}{7}(x + y + к + e) = \frac{2}{7} \cdot 2023 = 578.$$

x=289; 2x=y=к=e=578. x+ y + к+ e=2023. P=578. **ответ:** 578.

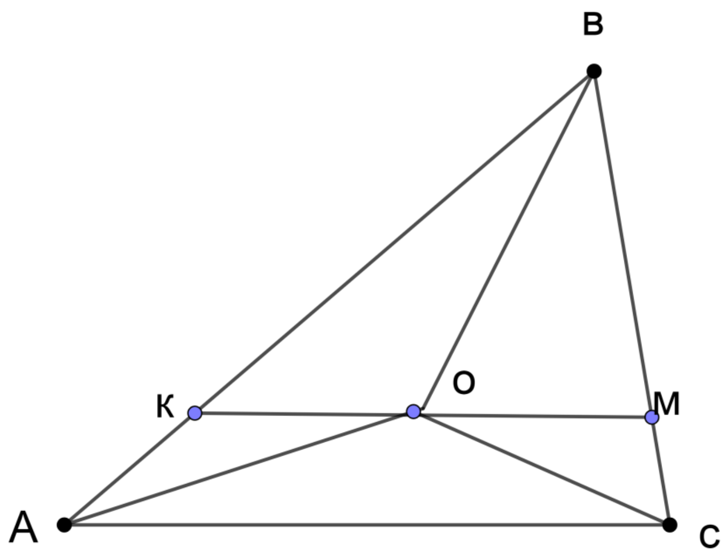
№5: Проценты.

Из бутыли, наполненной 12%-ным раствором соли, отлили 1 л и долили бутыль водой, затем отлили ещё 1 л и опять долили водой. В бутыли оказался 3%-ный раствор соли. Какова вместимость бутыли? **Ответ:** 2 л

№6: Планиметрия.

1. Через O точку пересечения биссектрис треугольника ABC, провели прямую KM параллельно стороне AC (K лежит на AB, M лежит на BC). Найдите длину отрезка KM, если площадь четырёхугольника $AKMC$ составляет 11/36 площади треугольника ABC, а разность периметров треугольников ABC и KBM равна 18. **ответ:**15.

решение.



1.Из треугольника АКО: АК=КО.

Из треугольника СМО: МС=МО.

2.P_{ABC}=AB+BC+AC.

P_{KBM}=KB+KO+OM+BM=AB+BC.

P_{ABC} - P_{KBM}=AC=18.

3.S_{AKMC}: S_{FDC}=11:36 следовательно S_{KMB}: S_{ABC}=25:36 следовательно KM:AC= 5:6. KM=15.

ответ:15.

№7: Теория чисел.

Решить уравнение $a^2 + 2 = b!$, при условии, что a, b принадлежит N. В ответе указать сумму произведения всех возможных a и произведения всех возможных b (если уравнение не имеет решений, в ответе укажите 0, если бесконечно много решений, укажите 1000).

Решение:

$b! - 2 = a^2;\ x, y \in N$

$a \geq 1$, т.е. $a^2 \geq 1 \Rightarrow b! \geq 3$, т.е. $b \geq 3$

Если $x \geq 5$, то $x!$ оканчивается на 0, тогда y^2 оканчивается на 8, но нет такого числа, квадрат, которого оканчивается на 8, т.е. $x < 5$.

Получается:

$\left[\begin{matrix} b=3 \\ b=4 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} a^2=4 \\ a^2=22 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} a=4 \\ a=-2, \notin N \\ a=\pm\sqrt{22}, \notin N \end{matrix}\right.$, т.е. $b = 3, a = 2$.

Получаем ответ на задачу: $a + b = 2 + 3 = 5$

Ответ: 5

№8: Параметр.

1.Найдите пару натуральных чисел x и a, удовлетворяющих условию $x^2+2x+21=a^2$. В ответ выпишите их сумму. **ответ:** 9.

решение. $x^2+2x+21=a^2 \Rightarrow (x^2+2x+1)+20=a^2 \Rightarrow a^2 - (x+1)^2=20 \Rightarrow (a-x-1)(a+x+1)=20 \Rightarrow$

Так как 20= 1·2·2·5, то решения последнего уравнения будем искать, как решения соответствующих систем уравнений (достаточно рассмотреть лишь произведение двух чётных целых чисел): $\begin{cases} a - x - 1 = 2; \\ a + x + 1 = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} a - x - 1 = 10; \\ a + x + 1 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a - x - 1 = -2; \\ a + x + 1 = -10 \end{cases}$

$\begin{cases} a - x - 1 = -10; \\ a + x + 1 = -2 \end{cases}$

Решением данных систем, а значит и соответствующего уравнения будут пары –

(a;x): (6;3); (6;-5); (-6;-5); (-6;3). Пара натуральных чисел x и a, удовлетворяющих условию (6;3). **ответ:** 9.

№9: Делимость.

Известно, что арифметическая прогрессия состоит из целых чисел, разность прогрессии равна 7 и сумма первых нескольких членов прогрессии равна 2744. Найдите все возможные значения первого члена прогрессии. В ответ запишите их сумму.

Ответ. $\mathbf{-20372}$.

Решение.

Пусть a – первый член арифметической прогрессии, тогда сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}n = 2744,$$

$$\big(2a+7(n-1)\big)n = 2\cdot 2744 = 2^4\cdot 7^3.$$

Если n – четно, то $2a+7(n-1)$ – нечетно, поэтому $n=16k$, где k – натуральный делитель числа 7^3. Возможные значения k: $1, 7, 7^2, 7^3$. Найдем возможные значения a.

Если $k=1$, то $n=16$ и $a=119$.

Если $k=7$, то $n=16\cdot 7$ и $a=-364$.

Если $k=7^2$, то $n=16\cdot 7^2=784$ и $a=-2737$.

Если $k=7^3$, то $n=16\cdot 7^3=5488$ и $a=-19204$.

Если n – нечетно, то $2a+7(n-1)$ – четно, поэтому $n=p$, где p – натуральный делитель числа 7^3. Возможные значения p: $1, 7, 7^2, 7^3$. Найдем возможные значения a.

Если $p=n=1$, то $a=2744$.

Если $p=n=7$, то $a=371$.

Если $p=n=7^2$, то $a=-112$.

Если $p=n=7^3$, то $a=-1189$.

Сумма всех возможных значений a равна:

$$119-364-2737-19204+2744+371-112-1189=-20372.$$

Ответ. $\mathbf{-20372}$.