

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика
8 класс

Вариант 1.

1. Найти значение выражения $2a - \left(\frac{2a-3}{a+1} - \frac{a+1}{2-2a} - \frac{a^2+3}{2a^2-2}\right) \cdot \frac{a^3+1}{a^2-a} + \frac{2}{a}$ при $a=1580$.

Решение:

$$1) 2a - \frac{2(a-1)(2a-3)+(a+1)(a+1)-(a^2+3)}{2(a-1)(a+1)} \cdot \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a} + \frac{2}{a}$$

$$2) 2a - \frac{2(a-1)(2a-3)+(a+1)(a+1)-(a^2+3)}{2(a-1)} \cdot \frac{(a^2-a+1)}{a^2-a} + \frac{2}{a}$$

$$3) 2a - \frac{(-4a+2+2a^2)}{(a-1)} \cdot \frac{(a^2-a+1)}{a \cdot (a-1)} + \frac{2}{a}$$

$$4) 2a - \frac{2(a-1)^2}{(a-1)} \cdot \frac{(a^2-a+1)}{a \cdot (a-1)} + \frac{2}{a}$$

$$5) 2a - \frac{2a^2-2a+2}{a} + \frac{2}{a}$$

$$6) \frac{2a^2-2a^2+2a-2+2}{a} = \frac{2a}{a}$$

Получаем ответ на задачу: $\frac{2a}{a} = 2$

Ответ: 2

2. У прямоугольника сумма двух сторон равна 11, сумма трёх равна 19,5. Найти произведение всех возможных различных значений периметра такого прямоугольника.

Решение:

Пусть стороны прямоугольника равны a и b .

Если сумма соседних сторон равна 11, то можно составить систему, описывающую условие задачи $\begin{cases} a+b=11 \\ 2a+b=19,5 \end{cases}$, её решение $a=8,5$, $b=2,5$,

периметр прямоугольника равен $P_1 = 22$.

Если же числу 11 равна сумма противоположных сторон, то возможны два варианта $\begin{cases} 2a=11 \\ 2a+b=19,5 \end{cases}$ ИЛИ $\begin{cases} 2a=11 \\ a+2b=19,5 \end{cases}$.

Решение первой системы $a=5,5$, $b=8,5$, периметр прямоугольника равен $P_2 = 28$.

Решение второй системы $a=5,5$, $b=7$, периметр прямоугольника равен

$P_3 = 25$. Произведение трёх возможных значений периметров равно $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 22 \cdot 28 \cdot 25 = 15400$.

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

Ответ: 15400.

3. Велосипедист проехал путь от А до В и обратно с некоторой постоянной скоростью. Пешеход прошел путь от А до В со скоростью в 3 раза меньшей скорости велосипедиста, но зато возвращался на автобусе, скорость которого в 5 раз больше скорости велосипедиста. Сколько времени затратил на путь туда и обратно пешеход, если один из них был в пути на 36 мин. дольше другого.

Решение:

$$v_B = x, t_B = \frac{S}{x} + \frac{S}{x} = \frac{2S}{x}$$

$$v_n \cdot AB = \frac{x}{3}, v_n \cdot BA = 5x, \text{ тогда}$$

$$t_n = \frac{S}{x/3} + \frac{S}{5x} = \frac{3S}{x} + \frac{S}{5x} = \frac{15S + S}{5x} = \frac{16S}{5x}$$

$$\text{Получим } \frac{16S}{5x} - \frac{2S}{x} = \frac{36}{60}; \frac{6S}{5x} = \frac{3}{5}, \text{ следовательно,}$$

$$\frac{S}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{тогда } t_B = 2 \cdot \frac{S}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ час}$$

$$t_n = 1 \text{ ч.} + \frac{3}{5} = 1,6 \text{ ч.}$$

Ответ: 1,6 ч.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах B , C и D равны 30° , 90° и 120° соответственно. Найти длину отрезка AB , если $AD = CD = 2$.

Решение:

Продлим прямые AB и CD до пересечения в точке E , получившийся треугольник ADE равносторонний, значит $ED = EA = 2$, катет $EC = ED + DC = 2 + 2 = 4$, так как он лежит в прямоугольном треугольнике BCE напротив угла 30° , то гипотенуза $BE = 8$, а отрезок $AB = BE - EA = 8 - 2 = 6$.

Ответ: 6.

5. Найти наибольшее значение параметра a , при которых уравнение:
 $(|x - 2| + 2a)^2 - 3(|x - 2| + 2a) + 4a(3 - 4a) = 0$ имеет три решения.

В ответе укажите наибольшее из них.

Решение:

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

Пусть $|x - 2| + 2a = t$, тогда

$$t^2 - 3t + 4a(3 - 4a) = 0$$

$$t^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}t + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + 12a - 16a^2 = 0;$$

$$(t - \frac{3}{2})^2 - (\frac{9}{4} - 12a + 16a^2) = 0;$$

$$(t - \frac{3}{2})^2 - (4a - \frac{3}{2})^2 = 0; (t - \frac{3}{2} + 4a - \frac{3}{2}) \cdot (t - \frac{3}{2} - 4a + \frac{3}{2}) = 0;$$

$$(t + 4a - 3) \cdot (t - 4a) = 0$$

Получим $(|x-2| + 2a + 4a - 3) \cdot (|x-2| + 2a - 4a) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} |x-2| + 6a - 3 = 0 \\ |x-2| - 2a = 0; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{6} \cdot |x-2| + \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \cdot |x-2| \end{array} \right.$$

Построим графики уравнений

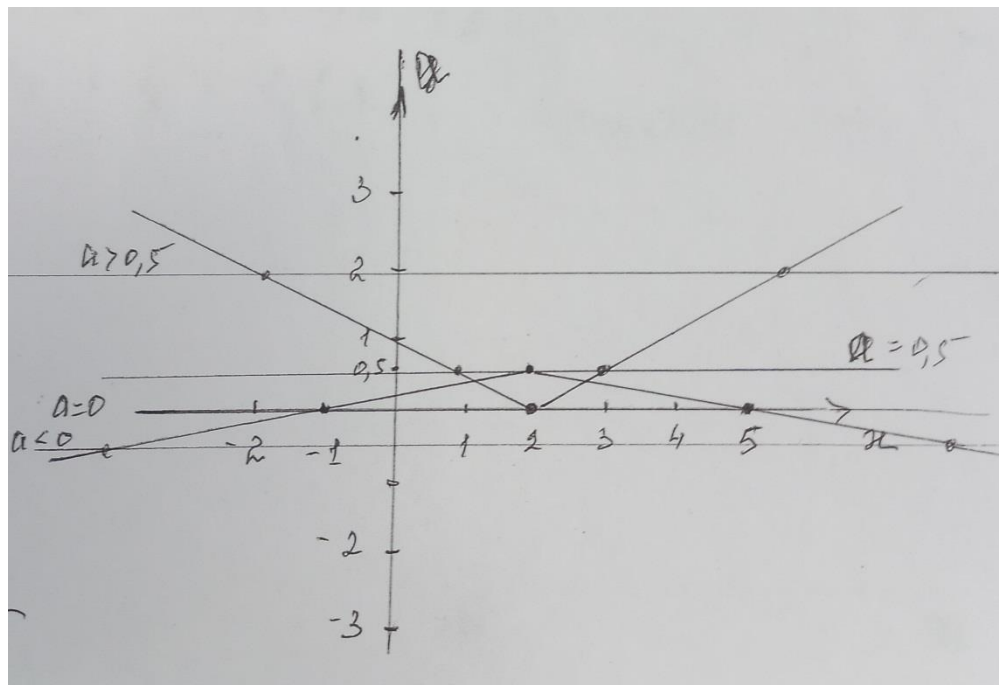
$$a = -\frac{1}{6} |x-2| + \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$a = \frac{1}{2} |x-2| \text{ в системе ХОА}$$

Уравнение имеет три решения при

$$a = 0, a = 0,5$$

Ответ: 0,5



Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

6. Тест состоит из вопросов с 4 вариантами ответа, только один ответ на каждый вопрос - правильный. С вероятностью $\frac{2}{3}$ Илья знает правильный ответ на вопрос, в противном случае он отмечает случайный вариант ответа. Если на какой-то вопрос Илья дал верный ответ, с какой вероятностью ответ на этот вопрос он отгадал? (Ответ округлите до сотых)

Решение:

Правильный ответ Илья мог получить 2 способами:

1) Если он знал этот ответ, то вероятность была $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

2) Если он угадывал ответ на этот вопрос, то вероятность была $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

Получаем ответ на задачу: $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{9}$

Ответ: 0.11

7. Для приготовления водного раствора кислоты взяли 3 л. 30% и 5 л. 46% раствора кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество воды, в результате чего получился 25% раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено.

№ раствора	V раствора (л)	Кислота (л.)	Кислота %
1.	3	$3 : 100 \cdot 30 = 0,9$	30%
2.	5	$5 : 100 \cdot 46 = 2,3$	46%
3.	$3 + 5 = 8$	3,2	$\frac{3,2}{8} \cdot 100 = 40\%$
4.	$8 - x + x$	$3,2 - \frac{x}{100} \cdot 40 = 3,2 - 0,4x$	25%

$$3,2 - 0,4x = \frac{8}{100} \cdot 25 ;$$

$$3,2 - 0,4x = 2 ; 0,4x = 1,2$$

$$x = 3$$

Ответ: 3 л.

8. В остроугольном треугольнике ABC со сторонами $AB=4$, $AC=3$ на медиане AM отметили точку N , так что $\angle BNM = \angle MAC$. Найти длину отрезка BN .

Решение:

Сделаем дополнительное построение, удвоим медиану AM за точку M , тем самым получим точку K , такую что $K \in AM$, $KM = AM$. Треугольники KMB

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика

и AMC равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно равны соответствующие стороны и углы: $BK = AC = 3$, $\angle MKB = \angle MAC$. Тогда получаем, что треугольник KBN равнобедренный $\angle BNM = \angle BKN$ и $BN = BK = 3$.

Ответ: 3.

9. Решить уравнение $a^2 + 2 = b!$, при условии, что a, b принадлежит \mathbb{N} . В ответе указать сумму произведения всех возможных a и произведения всех возможных b (если уравнение не имеет решений, в ответе укажите 0, если бесконечно много решений, укажите 1000).

Решение:

$$b! - 2 = a^2; x, y \in \mathbb{N}$$

$$a \geq 1, \text{ т.е. } a^2 \geq 1 \Rightarrow b! \geq 3, \text{ т.е. } b \geq 3$$

Если $x \geq 5$, то $x!$ оканчивается на 0, тогда y^2 оканчивается на 8, но нет такого числа, квадрат, которого оканчивается на 8, т.е. $x < 5$.

Получается:

$$\begin{cases} b=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ a^2=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-2, \notin \mathbb{N} \\ a=\pm\sqrt{22}, \notin \mathbb{N} \end{cases}, \text{ т.е. } b = 3, a = 2.$$

Получаем ответ на задачу: $a + b = 2 + 3 = 5$

Ответ: 5

Отборочный (заочный) онлайн-этап Олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по общеобразовательному предмету Математика