



Профиль: инженерное дело, специализация «Математика»

Вариант: 1

Класс: 10

Задача 1 (6 баллов). Решите неравенство $\sqrt[8]{5-x^2} > x^3 + x - 9$.

Задача 2 (8 баллов). Для определения веса арбуза, дыни и тыквы использовали неисправные электронные весы, которые показывали вес, отличающийся от истинного, но не более, чем на 0,5 кг в любую сторону (при этом при разных взвешиваниях отклонения показаний весов от истинного веса могли быть разными). Когда на весы положили арбуз и дыню вместе, то они показали 11,5 кг, совместный вес арбуза и тыквы оказался равным 13 кг, а дыни и тыквы – 12 кг. Когда взвесили арбуз, дыню и тыкву вместе, то весы показали 17 кг. Определите истинные веса арбуза, дыни и тыквы.

Задача 3 (8 баллов). Для занятия по рисованию в группе детского сада имеется 36 карандашей. Артем схватил восемь карандашей, София – семь, Саша – шесть, Вика – пять, Миша – четыре, Аня – три, Ваня – два, Маша – один, а Максиму и Алисе карандашей не досталось. Дети случайно рассаживаются за двумя столами с пятью стульчиками у каждого. Какова вероятность, что при этом общее количество карандашей на каждом столе окажется одинаковым?

Задача 4 (8 баллов). Биссектрисы AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников ABC и B_1OC_1 , если $AB:BC:AC = 2:3:4$.

Задача 5 (10 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $x(x+2) \leq a(2-a)$ имеет хотя бы одно решение, и каждое решение этого неравенства является также решением уравнения

$$|2a - 5|x + 1| + 3x + 7| + |a - |x| - 2| = a + |x| - 5|x + 1| + 3x + 9.$$

Задача 6 (10 баллов). Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ образовано плоскостью, проходящей через вершину F основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF , сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 2. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Инженерное дело (академический тур)

Предмет: Математика

Класс: 10

Задание 1 (максимальная оценка 6 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Определена ОДЗ, показано, что для неположительных x из ОДЗ неравенство выполняется.	2
Обосновано, что равенство левой и правой частей неравенства достигается в единственной точке, эта точка найдена.	3
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка.	5
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	6

Задание 2 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже.	0
Верно составлена система неравенств.	2
Верно определена сумма масс трех плодов и ограничения на массу каждого.	4
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, и/или нет полного обоснования полученного ответа.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	8

Задание 3 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Перечислены все группы благоприятных событий, верно определено число элементарных исходов части этих событий.	2
Верно посчитано число всех благоприятных элементарных исходов.	4
При решении задачи допущена одна вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	8

Задание 4 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Правильно использованы свойства биссектрис треугольников для определения соотношений отрезков, необходимых для нахождения площадей нужных треугольников.	2
Верно найдены соотношения для площадей треугольников, необходимые для получения правильного ответа.	4
При решении задачи допущена вычислительная ошибка при верных рассуждениях.	6
Приведено полностью обоснованное решение, получен верный ответ.	8

Задание 5 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Уравнение сведено к системе неравенств.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	5
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек, и/или нет полного обоснования, что полученное множество значений является окончательным.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	10

Задание 6 (максимальная оценка 10 б.)

Критерий (выбрать соответствие одному критерию)	Балл
Не выполнен ни один пункт, приведенный ниже, и/или просто записан верный ответ.	0
Верно построено сечение с полным описанием построения.	3
Найдены необходимые для решения задачи отношения, в которых плоскость сечения делит ребра пирамиды. Установлена связь расстояния от вершины пирамиды до плоскости сечения с углом между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.	5
При верных рассуждениях допущена одна вычислительная ошибка.	8
Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы.	10

Решение варианта №1 (Инженерное дело - 10 класс)

1. Решите неравенство $\sqrt[8]{5-x^2} > x^3 + x - 9$. (6 баллов)

Решение. ОДЗ: $5-x^2 \geq 0$, $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

Если $x \in [-\sqrt{5}; 0]$, то неравенство выполняется. Если $x \in [0; \sqrt{5}]$, то функция $f(x) = \sqrt[8]{5-x^2}$ непрерывна и убывает, а функция $g(x) = x^3 + x - 9$ непрерывна и возрастает. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение, таким решением является $x = 2$. Для каждого $x \in [0; 2)$ имеем $f(x) = \sqrt[8]{5-x^2} > f(2) = 1$, $g(x) = x^3 + x - 9 < g(2) = 1$, и неравенство $\sqrt[8]{5-x^2} > x^3 + x - 9$ выполняется. Для каждого $x \in (2; \sqrt{5}]$ имеем $f(x) = \sqrt[8]{5-x^2} < f(2) = 1$, $g(x) = x^3 + x - 9 > g(2) = 1$, и неравенство $\sqrt[8]{5-x^2} > x^3 + x - 9$ не выполняется. Итак, неравенство выполняется, если $x \in [-\sqrt{5}; 2)$.

Ответ: $[-\sqrt{5}; 2)$.

2. Для определения веса арбуза, дыни и тыквы использовали неисправные электронные весы, которые показывали вес, отличающийся от истинного, но не более, чем на 0,5 кг в любую сторону (при этом при разных взвешиваниях отклонения показаний весов от истинного веса могли быть разными). Когда на весы положили арбуз и дыню вместе, то они показали 11,5 кг, совместный вес арбуза и тыквы оказался равным 13 кг, а дыни и тыквы – 12 кг. Когда взвесили арбуз, дыню и тыкву вместе, то весы показали 17 кг. Определите истинные веса арбуза, дыни и тыквы. (8 баллов)

Решение. Пусть x , y , z – массы арбуза, дыни и тыквы соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 11 \leq x + y \leq 12, & (1) \\ 12,5 \leq x + z \leq 13,5, & (2) \\ 11,5 \leq y + z \leq 12,5 & (3) \\ 16,5 \leq x + y + z \leq 17,5, & (4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1) + (2) + (3) \Rightarrow 35 \leq 2(x + y + z) \leq 37, \Rightarrow 17,5 \leq x + y + z \Rightarrow (4) \quad x + y + z = 17,5.$$

$$(1) \Rightarrow 11 \leq 17,5 - z \leq 12 \Rightarrow 5,5 \leq z \leq 6,5;$$

$$(2) \Rightarrow 12,5 \leq 17,5 - y \leq 13,5 \Rightarrow 4 \leq y \leq 5;$$

$$(3) \Rightarrow 11,5 \leq 17,5 - x \leq 12,5 \Rightarrow 5 \leq x \leq 6.$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 23,5 \leq 17,5 + x \leq 25,5 \Rightarrow 6 \leq x \leq 8 \Rightarrow x = 6;$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 22,5 \leq 17,5 + y \leq 24,5 \Rightarrow 5 \leq y \leq 7 \Rightarrow y = 5;$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 24 \leq 17,5 + z \leq 26 \Rightarrow 6,5 \leq z \leq 8,5 \Rightarrow z = 6,5.$$

Ответ: арбуз – 6 кг, дыня – 5 кг, тыква – 6,5 кг.

3. Для занятия по рисованию в группе детского сада имеется 36 карандашей. Артем схватил восемь карандашей, София – семь, Саша – шесть, Вика – пять, Миша – четыре, Аня – три, Ваня – два, Маша – один, а Максиму и Алисе карандашей не досталось. Дети случайно рассаживаются за двумя столами с пятью стульчиками у каждого. Какова вероятность, что при этом общее количество карандашей на каждом столе окажется одинаковым? (8 баллов)

Решение. Перенумеруем детей по количеству имеющихся у них карандашей: $0_1, 0_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. За элементарный исход эксперимента можно взять совокупность номеров детей, оказавшихся за первым столом (заполнение второго стола определяется автоматически):

$$\omega = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}, \quad i_j \in \{0_1, 0_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad j = \overline{1, 5}.$$

С точки зрения комбинаторики это сочетание без повторений 5 элементов из 10 элементов. Поэтому общее количество исходов равно $|\Omega| = |\{\omega\}| = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = 252$. Для определенности будем указывать номера детей в сочетании в порядке возрастания:

$$\omega = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}, \quad i_1 \leq i_2 < i_3 < i_4 < i_5.$$

Пусть $A = \{\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\} : i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = \frac{36}{2} = 18\}$ — интересующая нас совокупность расстановок детей за первым столом. Очевидно, что при этом $i_1 \in \{0_1, 0_2, 1\}$, поскольку при $i_1 \geq 2$ мы получили бы $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 \geq 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$. Аналогично очевидно, что $i_5 \in \{6, 7, 8\}$, поскольку при $i_5 \leq 5$ мы получили бы $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 \leq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Поэтому совокупность (событие) A является объединением следующих 9, вообще говоря несовместных (!),¹ событий:

$$A = (A_{i_1=0_1, i_5=6} \sqcup A_{i_1=0_1, i_5=7} \sqcup A_{i_1=0_1, i_5=8}) \cup (A_{i_1=0_2, i_5=6} \sqcup A_{i_1=0_2, i_5=7} \sqcup A_{i_1=0_2, i_5=8}) \sqcup \\ \sqcup (A_{i_1=1, i_5=6} \sqcup A_{i_1=1, i_5=7} \sqcup A_{i_1=1, i_5=8}).$$

Рассмотрим по отдельности эти события:

$$1) A_{i_1=0_1, i_5=6} = \{\{0_1, i_2, i_3, i_4, 6\} : 0_1 \leq i_2 < i_3 < i_4 < 6; i_2 + i_3 + i_4 = 12\} \stackrel{!)}{=} \\ = \{0_1, \boxed{3, 4, 5}, 6\}, \quad |A_{i_1=0_1, i_5=6}| = \boxed{1}.$$

$$2) A_{i_1=0_1, i_5=7} = \{\{0_1, i_2, i_3, i_4, 7\} : 0_1 \leq i_2 < i_3 < i_4 < 7; i_2 + i_3 + i_4 = 11\} \stackrel{!)}{=} \\ = \{\{0_1, \boxed{0_2, 5, 6}, 7\}, \{0_1, \boxed{1, 4, 6}, 7\}, \{0_1, \boxed{2, 3, 6}, 7\}, \{0_1, \boxed{2, 4, 5}, 7\}\}; \\ |A_{i_1=0_1, i_5=7}| = \boxed{4}.$$

$$3) A_{i_1=0_1, i_5=8} = \{\{0_1, i_2, i_3, i_4, 8\} : 0_1 \leq i_2 < i_3 < i_4 < 8; i_2 + i_3 + i_4 = 10\} \stackrel{!)}{=} \\ = \{\{0_1, \boxed{0_2, 3, 7}, 8\}, \{0_1, \boxed{1, 2, 7}, 8\}, \{0_1, \boxed{0_2, 4, 6}, 8\}, \{0_1, \boxed{1, 3, 6}, 8\}\}; \\ = \{\{0_1, \boxed{1, 4, 5}, 8\}, \{0_1, \boxed{2, 3, 5}, 8\}\}; \quad |A_{i_1=0_1, i_5=8}| = \boxed{6}.$$

4), 5), 6) Аналогично:

¹ За счет того, что $\{0_1, 0_2\}$ и $\{0_2, 0_1\}$ — это одна и та же комбинация детей.

$$|A_{i_1=0_2, i_5=6}| = \boxed{1}, \quad |A_{i_1=0_2, i_5=7}| = \boxed{4}, \quad |A_{i_1=0_2, i_5=8}| = \boxed{6}.$$

$$\begin{aligned} 7) \ A_{i_1=1, i_5=6} &= \left\{ \{1, i_2, i_3, i_4, 6\} : 1 < i_2 < i_3 < i_4 < 6; \ i_2 + i_3 + i_4 = 11 \right\} \stackrel{(!)}{=} \\ &= \{1, \boxed{2, 4, 5}, 6\}, \quad |A_{i_1=1, i_5=6}| = \boxed{1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \ A_{i_1=1, i_5=7} &= \left\{ \{1, i_2, i_3, i_4, 7\} : 1 < i_2 < i_3 < i_4 < 7; \ i_2 + i_3 + i_4 = 10 \right\} \stackrel{(!)}{=} \\ &= \{1, \boxed{2, 3, 5}, 7\}, \quad |A_{i_1=1, i_5=7}| = \boxed{1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \ A_{i_1=1, i_5=8} &= \left\{ \{1, i_2, i_3, i_4, 8\} : 1 < i_2 < i_3 < i_4 < 8; \ i_2 + i_3 + i_4 = 9 \right\} \stackrel{(!)}{=} \\ &= \{1, \boxed{2, 3, 4}, 8\}, \quad |A_{i_1=1, i_5=8}| = \boxed{1}. \end{aligned}$$

И учитывая, что исход (рассадки детей) $\{\boxed{0_1, 0_2}, 5, 6, 7\}$ из события $A_{i_1=0_1, i_5=7}$ очевидно повторяется в событии $A_{i_1=0_2, i_5=7}$, а исходы $\{\boxed{0_1, 0_2}, 3, 7, 8\}$, $\{\boxed{0_1, 0_2}, 4, 6, 8\}$ из события $A_{i_1=0_1, i_5=8}$ очевидно повторяются в событии $A_{i_1=0_2, i_5=8}$, получаем:

$$|A| = (1 + 4 + 6) + (1 + 4 + 6) + (1 + 1 + 1) - 3 = 22.$$

И тогда:

$$\mathbb{P}(A) \stackrel{(!)}{=} \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{22}{252} = \frac{11}{126}.$$

Ответ: Искомая вероятность равна $\frac{11}{126}$.

4. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников ABC и B_1OC_1 , если $AB:BC:AC = 2:3:4$. (8 баллов)

Решение.

$$AB:BC:AC = 2:3:4,$$

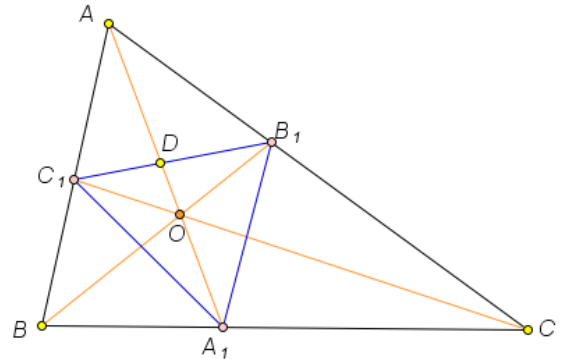
$$a = BC = 3x, b = AC = 4x, c = AB = 2x.$$

По свойствам биссектрис имеем

$$AC_1 = \frac{bc}{a+b} = \frac{8x}{7}, \quad BC_1 = \frac{ac}{a+b} = \frac{6x}{7},$$

$$AB_1 = \frac{bc}{a+c} = \frac{8x}{5}, \quad CB_1 = \frac{ab}{a+c} = \frac{12x}{5},$$

$$S_{C_1AB_1} = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{5} S_{ABC} = \frac{8}{35} S_{ABC}.$$



По теореме Менелая для треугольника ABO имеем $\frac{OD}{DA} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BB_1}{OB_1} = 1$. Поскольку $\frac{BO}{OB_1} = \frac{5}{4}$, то

$$\frac{OD}{DA} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}. \quad \text{Тогда } \frac{S_{C_1OB_1}}{S_{C_1AB_1}} = \frac{OD}{DA} = \frac{1}{3}, \quad S_{C_1OB_1} = \frac{1}{3} S_{C_1AB_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{35} S_{ABC} = \frac{8}{105} S_{ABC}.$$

Ответ: $\frac{105}{8}$.

5. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $x(x+2) \leq a(2-a)$ имеет хотя бы одно решение, и каждое решение этого неравенства является также решением уравнения $|2a-5|x+1|+3x+7|+|a-|x|-2|=a+|x|-5|x+1|+3x+9$. (10 баллов)

Решение:

Преобразуем неравенство $x(x+2) \leq a(2-a) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (a-1)^2 \leq 2$.

Преобразуем уравнение $|2a-5|x+1|+3x+7|+|a-|x|-2|=a+|x|-5|x+1|+3x+9$. Обозначим $u = 2a-5|x+1|+3x+7$, $v = a-|x|-2$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид $|u|+|v|=u-v$. Решениями последнего уравнения являются все u и v такие, что $u \geq 0$, $v \leq 0$, или $2a-5|x+1|+3x+7 \geq 0$ и $a-|x|-2 \leq 0$. Отсюда имеем $2,5|x+1|-1,5x-3,5 \leq a \leq |x|+2$

В системе Oxa построим кривые $(x+1)^2 + (a-1)^2 = 2$, $2a = 5|x+1|-3x-7$ и $a = |x|+2$. Точки, удовлетворяющие неравенству $(x+1)^2 + (a-1)^2 \leq 2$ образуют круг с центром в точке $(-1; 1)$ радиуса $\sqrt{2}$. Точки, удовлетворяющие неравенству $2,5|x+1|-1,5x-3,5 \leq a \leq |x|+2$, расположены в области ниже угла $a = |x|+2$ и выше угла $2a = 5|x+1|-3x-7$, включая границу.

Найдем точки пересечения окружности и прямой $a = -4x-6$ (левый луч второго угла).

Подставим $a = -4x-6$ в уравнение окружности $(x+1)^2 + (a-1)^2 = 2$.

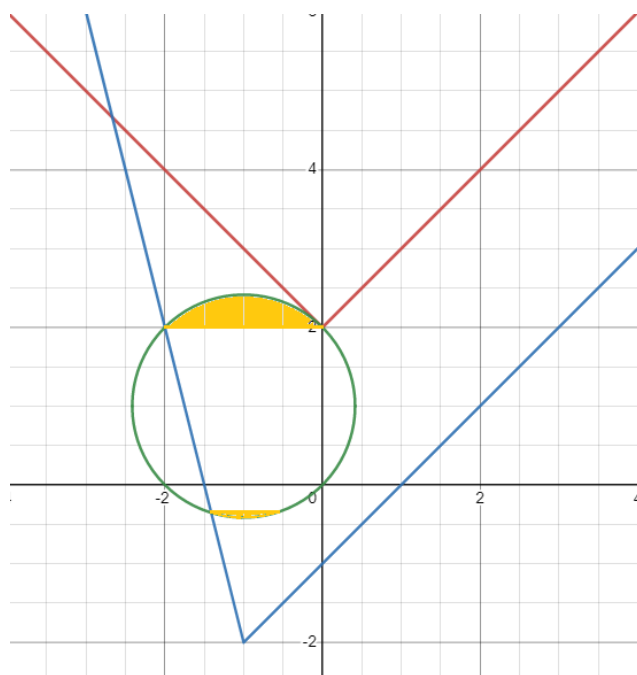
Получим $(x+1)^2 + (4x+7)^2 = 2$,

$$17x^2 + 58x + 48 = 0,$$

$$x_1 = -2, a_1 = 2, x_2 = -\frac{24}{17}, a_2 = -\frac{6}{17}. \quad \text{Тогда}$$

значения параметра a , отвечающие на вопрос задачи образуют множество

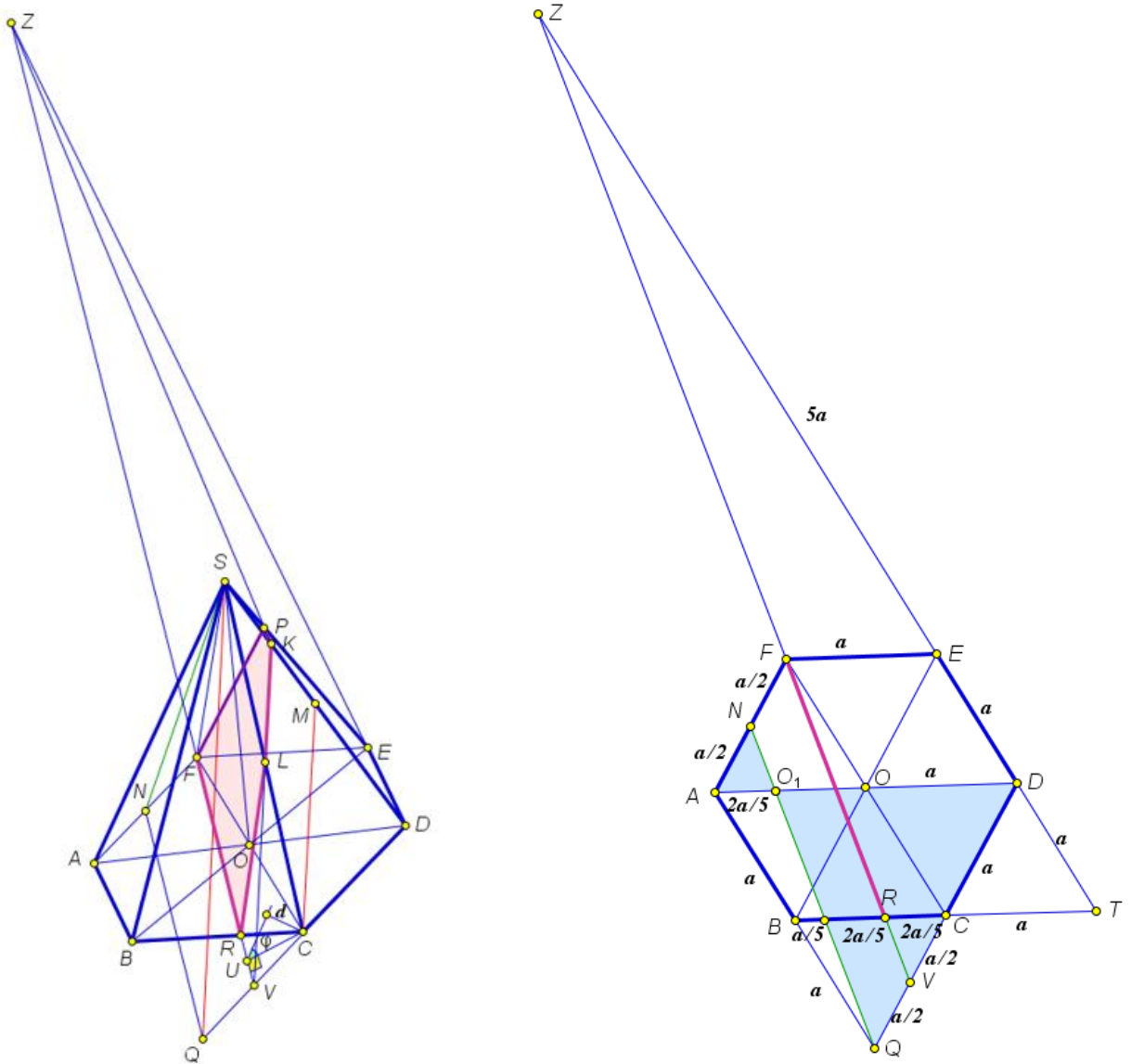
$$\left[1-\sqrt{2}; -\frac{6}{17}\right] \cup \left[2; 1+\sqrt{2}\right]. \quad \text{Ответ: } \left[1-\sqrt{2}; -\frac{6}{17}\right] \cup \left[2; 1+\sqrt{2}\right].$$



6. Сечение правильной шестиугольной пирамиды $SAB CDEF$ образовано плоскостью, проходящей через вершину F основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF , сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно 2. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания. (10 баллов)

Решение. В плоскости SCD через точку S проведем прямую SQ , параллельную CM , Q принадлежит прямой CD , CM – средняя линия треугольника SQD , $QC = a$, где a – сторона основания пирамиды.

Плоскость SNQ параллельна плоскости сечения. Через точку F проведем прямую FV , параллельную NQ , $V \in CQ$, $QV = VC = a/2$. R – точка пересечения прямых FV и BC . Плоскость сечения пересекает основание пирамиды по отрезку FR .



O_1 – точка пересечения NQ и AD , треугольники AO_1N и DO_1Q подобны. $AO_1 : O_1D = 1 : 4$, $AO_1 = 2a/5$, $RC = AO_1 = 2a/5$.

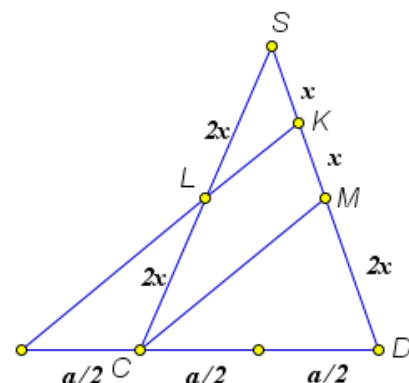
Точка Z – точка пересечения прямых RF и DE . Точка T – точка пересечения прямых BC и DE .
Треугольники FZE и RZT подобны, и $FE:RT = ZE:ZT = 5:7, ZE = 5a$.

В плоскости SCD через точку V проведем прямую VK , параллельную CM , K принадлежит ребру SD , L – точка пересечения прямой VK с ребром SC .

По теореме Фалеса имеем: $SK:KM:MD = 1:1:2, SL:LC = 1:1$.

В плоскости SDE точка P – точка пересечения прямых ZK и SE .
По теореме Фалеса имеем $SP:PE = 2:5$.

Искомое сечение $KLRFP$.



Обозначим расстояние от точки S до плоскости сечения $d, d = 2$.

Расстояние от точки C до сечения равно d . В треугольнике RCV проведем высоту CU ,

обозначим ее длину h . Тогда $\sin \varphi =$

$\frac{d}{h}, \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{h}\right)^2}$. Найдём RV по теореме косинусов:

$$RV^2 = \frac{4a^2}{25} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5} = \frac{21a^2}{100}, RV = \frac{\sqrt{21}a}{10}$$

Используя различные формулы для нахождения площади треугольника RCV , имеем

$$\frac{\sqrt{21}ah}{10} = \frac{a^2}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{a}{\sqrt{7}}. \text{ Тогда } \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{7d^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - 7d^2}}{a} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

