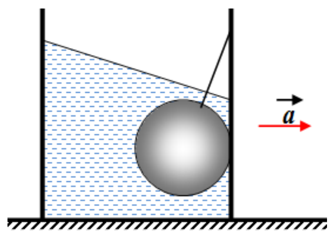
Профиль: Физика

Вариант: 2 Класс: 10

Задача 1. (8 баллов). Небольшой камень бросили с отвесного обрыва под некоторым углом к горизонту. Камень, двигаясь по параболе, упал на поверхность земли спустя T = 8 с. При этом камень поднимался до верхней точки траектории на Δt = 2 с меньше, чем он двигался вниз от вершины параболы до поверхности земли. С какой высоты от поверхности земли был брошен камень? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

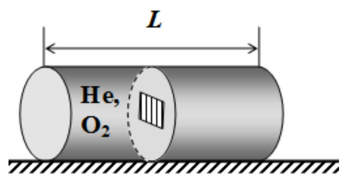
Задача 2. (8 баллов). Для исследования некоторой планеты по круговой орбите вокруг нее с постоянной скоростью v = 4 км/с движется искусственный спутник, совершая полный оборот вокруг планеты за время T = 10 часов. Радиус планеты R = 6000 км. Чему равно ускорение свободного падения на поверхности планеты?

Задача 3. (14 баллов). Сосуд, имеющий форму прямоугольной призмы, заполнен водой. К боковой стенке сосуда подвешен на нити железный шарик радиуса R = 10 см (см. рисунок). Трение шарика о стенку пренебрежимо мало. Сосуд движется с постоянным ускорением $a = g/\sqrt{3}$ по горизонтальной поверхности, шарик при этом не касается дна сосуда и остается полностью погруженным в воду. При какой минимальной длине нити шарик не будет давить на стенку? Плотность воды $\rho_в$ = 10^3 кг/м^3, плотность железа $\rho_ж$ = 7,9·10^3 кг/м^3. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



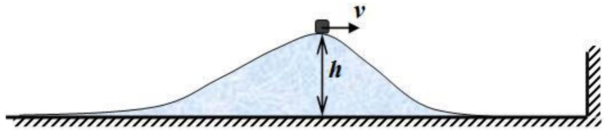
Задача 4. (14 баллов). С ν = 1 моль идеального одноатомного газа совершают некоторый политропный процесс, в результате которого газ переходит из состояния с начальными объёмом V_1 = 3 л и абсолютной температурой T_1 = 300 К в состояние с объёмом V_2 = 4,5 л и абсолютной температурой T_2 = 675 К. Какую работу совершает газ в этом процессе? Связь давления p и объема V в политропном процессе описывается формулой pV^n = const, где показатель политропы n – некоторое действительное число. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

Задача 5. (18 баллов). На гладком горизонтальном столе покоится цилиндрический сосуд длиной L = 54 см. Сосуд разделен на две равные части неподвижной перегородкой, в которой имеется полупроницаемая мембрана; пропускающая молекулы гелия и не пропускающая молекулы кислорода (см. рисунок). Вначале мембрана закрыта, левая часть сосуда заполнена смесью гелия и кислорода, а в правой – вакуум. После открытия мембраны и установления теплового равновесия, давление в левой части сосуда уменьшилось на 25%. В какую сторону и на какое расстояние сдвинется при этом сосуд? Массой сосуда и перегородки пренебречь. Температуру газов за все время наблюдения считать одинаковой и неизменной.

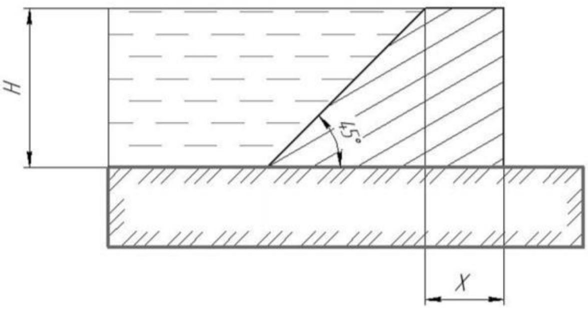


Продолжение билета см. на обороте.

Задача 6. (18 баллов). На горизонтальной поверхности льда находится ледяная горка, которая может скользить по поверхности льда (см. рисунок). На вершине горки покоится маленькая шайба. Масса горки в $k = 8$ раз больше массы шайбы. Вначале горка и шайба неподвижны. Трение пренебрежимо мало. Шайбе сообщили горизонтально направленную скорость v = 1 м/с, при которой она, соскользнув с горки и ударившись упруго о вертикальный борт, при обратном движении смогла подняться на вершину горки. При какой максимальной высоте h горки это возможно? Считать, что при движении по горке шайба не отрывается от неё, все движения шайбы и горки по горизонтальной поверхности происходят вдоль одной прямой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ситуационная задача (20 баллов) Гравитационная плотина – это сооружение, преграждающее путь воде, удерживаемое на месте только силой трения между основанием конструкции и опорной поверхностью. Рассматриваемая плотина, горизонтальной протяженностью $a = 1$ м, выполнена из бетона, имеет поперечное сечение в форме трапеции, длина малого основания которой $X = 5{,}5$ м. "Мокрая" стенка плотины наклонена под углом 45 градусов к горизонту, а "сухая" – вертикальна, высота столба жидкости, равна высоте плотины H. Коэффициент трения между конструкцией и опорной поверхностью μ = 0,25, плотность бетона $\rho_б = 2200$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3. Найдите минимальную высоту плотины H, при которой она будет неподвижна.



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Физика («Профессор Жуковский»)
Предмет: Физика
Класс: 10, вариант 2

Задание 1 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Записана формула для времени подьема t1	1
Записана формула для нахождения t2 (или как альтернатива формула для полного времени движения T)	2
Записаны все уравнения, необходимые для решения задачи	2
Проделаны необходимые алгебраические преобразования	2
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание 2 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Записана формула связи скорости и периода (или любая другая аналогичная формула кинематики движения по окружн.)	1
Записан закон всемирного тяготения	1
Записан второй закон Ньютона при движении по окружности	2
Записана формула для ускорения свободного падения на поверхности планеты	1
Проделаны необходимые алгебраические преобразования	2
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание 3 (максимальная оценка 14 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Сделан рисунок, с правильными направлениями всех сил	1
Пояснено, почему сила натяжения нити проходит через центр шара	2
Указано, что сила Архимеда имеет не только вертикальную, но и горизонтальную составляющую и правильно записаны формулы для силы Архимеда	2
Записаны уравнения динамики для шара	2
Получено значение угла наклона нити (или любой из тригонометрических функций этого угла)	2
Проделаны необходимые алгебраические преобразования	4
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание 4 (максимальная оценка 14 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Записано уравнение состояния идеального газа	1
Есть понимание, как посчитать работу ид. газа в любом процессе (через площадь под графиком, или интеграл)	2
Получено значение показателя политропы n	4
Получено выражения для работы	6
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание 5 (максимальная оценка 18 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Получены выражения для парциальных давлений гелия (в начальном и конечном состояниях) и кислорода	3
Записаны формулы для давления в левой части сосуда в начальном и конечном состояниях	2
Записаны формулы для начального и конечного положений центра масс системы	2
Указано, что центр масс системы не смещается	1
Получена формула для смещения сосуда s	3
Получено отношение масс азота и водорода	3
Сделаны необходимые алгебраические преобразования и получена окончательная формула для смещения s	2
Указано, что сосуд сместился влево	1
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание 6 (максимальная оценка 18 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Записаны уравнения законов сохранения энергии и импульса в обоих случаях	8
Указано, что при упругом отражении от бортика модуль скорости сохранится, изменится только направление	1
Есть понимание, что во втором случае, когда шайба на вершине горки, скорости горки и шайбы равны	2
Проделаны необходимые алгебраические преобразования	6
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание С (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Сформулирована расчётная схема (в том числе, графически), выделены и правильно формализованы все необходимые физические законы	5
Составлена система уравнений и математическая модель	5
Верно учтены технические параметры, характеристики и ограничения	5
Проведены расчеты, получен верный ответ, разумный с точки зрения физического смысла	5

Решения

Задача 1 (*8 баллов*). Небольшой камень бросили с отвесного обрыва под некоторым углом к горизонту. Камень, двигаясь по параболе, упал на поверхность земли спустя $T = 8$ с. При этом камень поднимался до верхней точки траектории на $\Delta t = 2$ с меньше, чем он двигался вниз от вершины параболы до поверхности земли. С какой высоты от поверхности земли был брошен камень? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ. $h = \frac{g}{2}\Delta t \cdot T = 80$ м.

Решение.

Обозначим h_{max} – максимальную высоту подъема камня, t_1 – время движения камня вверх до максимальной высоты, t_2 – время падения с точки максимального подъема до земли. Тогда $h_{\max} - h = \frac{gt_1^2}{2}$, $h_{\max} = \frac{gt_2^2}{2}$. Вычитая из второго уравнения первое, получим $h = \frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}{2} = \frac{g}{2}\Delta t \cdot T = \frac{10 \cdot 8 \cdot 2}{2} = 80$ м.

Возможны другие (альтернативные) решения задачи. Например, можно выразить время подъема t_1 и полное время движения T через вертикальную проекцию начальной скорости v_{0y}, а затем найти v_{0y}.

Критерии оценивания задачи 1.

	Элементы решения	Баллы (макс. 8 баллов)
1	Записана формула для времени подъема t_1	+1 балла
2	Записана формула для нахождения t_2 (или как альтернатива формула для полного времени движения T)	+2 балла
3	Записаны все уравнения, необходимые для решения задачи	+2 балла
4	Проделаны необходимые алгебраические преобразования	+2 балла
5	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 2 (*8 баллов*). Для исследования некоторой планеты по круговой орбите вокруг нее с постоянной скоростью v = 4 км/с движется искусственный спутник, совершая полный оборот вокруг планеты за время T = 10 часов. Радиус планеты R = 6000 км. Чему равно ускорение свободного падения на поверхности планеты?

Ответ. $g = \frac{Tv^3}{2\pi R^2} = 10,2$ м/с^2.

Решение.

1)Запишем уравнения движения спутника по круговой орбите радиуса r.

$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, где m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника по орбите.

2) Связь скорости v и периода обращения T. $v = \frac{2\pi r}{T}, \Rightarrow r = \frac{Tv}{2\pi}$.

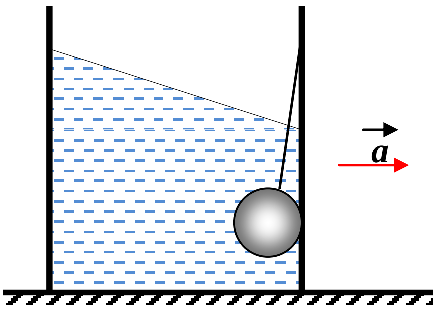
3) Ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = \frac{GM}{R^2}$.

Из этих уравнений $\Rightarrow$ $g = \frac{Tv^3}{2\pi R^2} = \frac{10 \cdot 3600 \cdot (4 \cdot 10^3)^3}{2\pi \cdot (6 \cdot 10^6)^2} = 10,2$ м/с^2.

Критерии оценивания задачи 2.

	Элементы решения	Баллы (макс. 8 баллов)
1	Записана формула связи скорости и периода (или любая другая аналогичная формула кинематики движения по окружн.)	+1 балла
2	Записан закон всемирного тяготения	+1 балла
3	Записан второй закон Ньютона при движении по окружности	+2 балла
4	Записана формула для ускорения свободного падения на поверхности планеты	+1 балла
5	Проделаны необходимые алгебраические преобразования	+2 балла
6	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 3 (*14 баллов*). Сосуд, имеющий форму прямоугольной призмы, заполнен водой. К боковой стенке сосуда подвешен на нити железный шарик радиуса R = 10 см (см. рисунок). Трение шарика о стенку пренебрежимо мало. Сосуд движется с постоянным ускорением $a = g/\sqrt{3}$ по горизонтальной поверхности, шарик при этом не касается дна сосуда и остается полностью погруженным в воду. При какой минимальной длине нити шарик не будет давить на стенку?

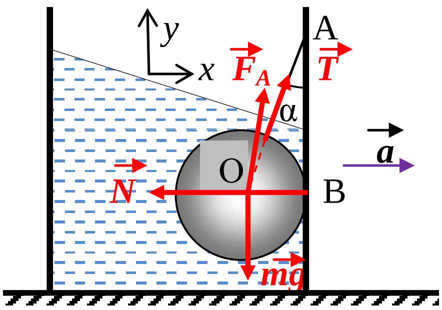


Плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, плотность железа $\rho_ж = 7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Ответ. $l_{\min} = R = 0{,}1$ м.

Решение.

1) Силы, действующие на шарик, показаны на рисунке, и проходят через центр шара. Если бы сила натяжения нити $\vec{T}$ не проходила бы через центр O, то относительно оси, проходящей через точку O, эта единственная сила создавала бы ненулевой вращательный момент и шар бы вращался до тех пор, пока положение нити, не оказалось бы проходящим через центр шара.



2) Сила Архимеда, в случае, когда сосуд движется с горизонтальным ускорением $\vec{a}$, направлена не вертикально, а перпендикулярно свободной поверхности жидкости и определяется формулой $\vec{F}_A = \rho_в V(\vec{a} - \vec{g})$, где $\rho_в$ – плотность воды, V – объём шара.

3) Предположим, что шарик давит на стенку, тогда можно записать уравнения динамики шарика в проекциях на оси координат.

$$\begin{cases} x: T\sin\alpha + F_{Ax} - N = ma, \\ T\cos\alpha + F_{Ay} - mg = 0. \end{cases}$$

Проекции силы Архимеда на оси координат равны $F_{Ax} = \rho_в Va$ и $F_{Ay} = \rho_в Vg$.

Решаем полученную систему. $\Rightarrow$ $(m - \rho_в V)g\,\mathrm{tg}\,\alpha = (m - \rho_в V)a + N$.

Т.к. плотность шарика больше плотности воды, то $m > \rho_в V$. Условие того, что шар давит на стенку: $N > 0$. Тогда, чтобы шар давил на стену в процессе движения, должно выполняться неравенство $N = (m - \rho_в V)(g\,\mathrm{tg}\,\alpha - a) > 0$. Откуда, с учетом того, что $m > \rho_в V$, $\Rightarrow$

$a < g\,\text{tg}\,\alpha$. Соответственно, чтобы шарик не давил на стенку сосуда, должно быть $a \geq g\,\text{tg}\,\alpha$ или $\text{tg}\,\alpha \leq \frac{a}{g} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\Rightarrow$ $\alpha \leq 30^\circ$.

4) Из геометрии получим $\sin\alpha = \frac{R}{R+l}$. $\Rightarrow$ $\frac{R}{R+l} \leq \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $l \geq R$, и $l_{\min} = R = 0{,}1$ м.

Критерии оценивания задачи 3.

	Элементы решения	Баллы (макс. 14 баллов)
1	Сделан рисунок, с правильными направлениями всех сил	+1 балл
2	Пояснено, почему сила натяжения нити проходит через центр шара	+2 балла
3	Указано, что сила Архимеда имеет не только вертикальную, но и горизонтальную составляющую и правильно записаны формулы для силы Архимеда	+2 балла
4	Записаны уравнения динамики для шара	+2 балла (по 1 баллу за каждую формулу)
5	Получено значение угла наклона нити (или любой из тригонометрических функций этого угла)	+2 балла
6	Проделаны необходимые алгебраические преобразования	+4 балла
7	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 4 (*14 баллов*). С ν = 1 моль идеального одноатомного газа совершают некоторый политропный процесс, в результате которого газ переходит из состояния с начальными объёмом V_1 = 3 л и абсолютной температурой T_1 = 300 К в состояние с объёмом V_2 = 4,5 л и абсолютной температурой T_2 = 675 К. Какую работу совершает газ в этом процессе? Связь давления p и объема V в политропном процессе описывается формулой $pV^n = const$, где показатель политропы n – некоторое действительное число. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

Ответ. $A = \frac{1}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 8{,}31\cdot(675-300) = 1558$ Дж.

Решение.

1) Найдем показатель политропы n. Для этого запишем уравнение политропного процесса и уравнение состояния идеального газа, и найдем связь объема и температуры для политропного процесса.

$$\begin{cases} pV^n = c = const, \\ pV = \nu RT. \end{cases} \Rightarrow V^{n-1}T = const, \Rightarrow V_1^{n-1}T_1 = V_2^{n-1}T_2, \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Подставим в последнюю формулу числовые значения. Тогда

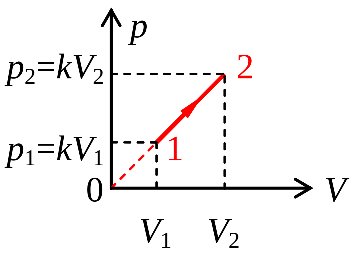
$$\left(\frac{3}{4{,}5}\right)^{n-1} = \frac{675}{300}, \Rightarrow \left(\frac{1}{1{,}5}\right)^{n-1} = 2{,}25 = 1{,}5^2, \Rightarrow 1-n = 2, \Rightarrow n = -1.$$

Таким образом, заданный процесс имеет вид $p = kV$, где $k = const$ (см. рисунок).

2) Тогда работа газа равна $A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}k\left(V_2^2 - V_1^2\right)$.

Воспользуемся уравнениями состояний 1 и 2, которые запишем в виде: $p_1V_1 = kV_1^2 = \nu RT_1$ и $p_2V_2 = kV_2^2 = \nu RT_2$.

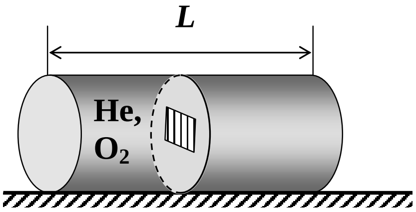
$\Rightarrow$ $A = \frac{1}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 8{,}31\cdot(675-300) = 1558$ Дж.



Критерии оценивания задачи 4.

	Элементы решения	Баллы (макс. 14 баллов)
1	Записано уравнение состояния идеального газа	+1 балл
2	Есть понимание, как посчитать работу ид. газа в любом процессе (через площадь под графиком, или интеграл)	+2 балла
3	Получено значение показателя политропы *n*	+4 баллов
4	Получено выражения для работы	+6 баллов
5	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 5 (*18 баллов*). На гладком горизонтальном столе покоится цилиндрический сосуд длиной L = 54 см. Сосуд разделен на две равные части неподвижной перегородкой, в которой имеется полупроницаемая мембрана; полупроницаемая мембрана пропускает молекулы гелия и не пропускает молекулы кислорода (см. рисунок).

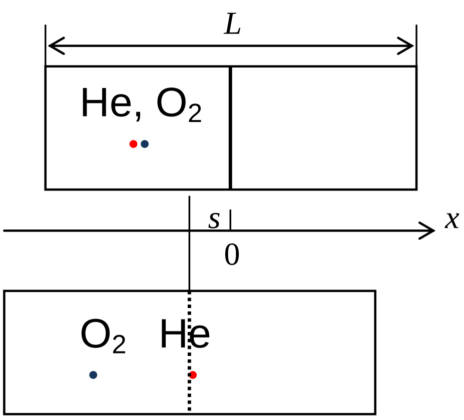


Вначале мембрана закрыта, левая часть сосуда заполнена смесью гелия и кислорода, а в правой – вакуум. После открытия мембраны и установления теплового равновесия, давление в левой части сосуда уменьшилось на 25%. В какую сторону и на какое расстояние сдвинется при этом сосуд? Массой сосуда и перегородки пренебречь. Температуру газов за все время наблюдения считать одинаковой и неизменной. Молярные массы гелия и кислорода равны соответственно $\mu_г$ = 4 г/моль, $\mu_к$ = 32 г/моль.

Ответ. Сосуд сместится влево на $s = \dfrac{L}{4\left(1+\dfrac{\mu_к}{\mu_г}\right)} = 1{,}5$ см.

Решение

1) Обозначим V – объём сосуда, m_1 – масса гелия He, m_2 – масса кислорода O_2. Вначале центр масс гелия и кислорода находился посредине левой части сосуда. Тогда центр масс системы имеет координату (см. первый рисунок) $x_{ц.м.}^{нач.} = -\dfrac{L}{4}$.



После открытия мембраны гелий займет весь сосуд, и его центр масс будет находиться посредине сосуда, а положение центра масс кислорода не изменится, при этом будем считать, что сосуд сдвинулся влево на s (см. второй рисунок).

В этом случае положение центра системы определяется формулой $x_{ц.м.}^{кон.}=\dfrac{m_1(-s)+m_2\left(-\dfrac{L}{4}-s\right)}{m_1+m_2}$. На систему не действуют внешние силы в горизонтальном направлении, поэтому $x_{ц.м.}^{кон.}=x_{ц.м.}^{нач.}. \Rightarrow s=\dfrac{m_1L}{4(m_1+m_2)}$.

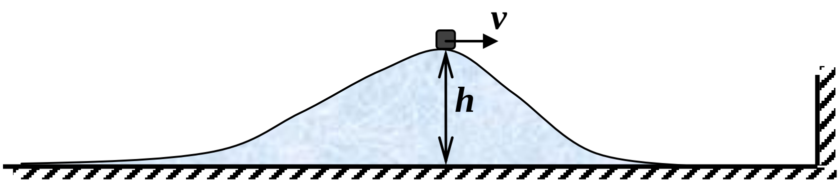
2). Чтобы найти отношение масс газов, посчитаем начальное и конечное давления в в левой части сосуда. До открытия мембраны давление в левой части сосуда равно $p_{нач.}=p_г^{нач}+p_к=\dfrac{2m_1RT}{\mu_г V}+\dfrac{2m_2RT}{\mu_к V}$. После открытия мембраны и установления теплового равновесия давление слева будет равно $p_{кон.}=p_г^{кон}+p_к=\dfrac{m_1RT}{\mu_г V}+\dfrac{2m_2RT}{\mu_к V}$. По условию $p_{кон.}=0,75p_{нач.}. \Rightarrow \dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{\mu_к}{\mu_г}=\dfrac{32}{4}=8$.

Тогда $s=\dfrac{L}{4\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)}=\dfrac{54}{4\cdot(1+8)}=1,5$ см.

Критерии оценивания задачи 5.

	Элементы решения	Баллы (макс. 18 баллов)
1	Получены выражения для парциальных давлений гелия (в начальном и конечном состояниях) и кислорода	+3 балла (по 1 баллу за каждую формулу)
2	Записаны формулы для давления в левой части сосуда в начальном и конечном состояниях	+2 балла (по 1 баллу за каждую формулу)
3	Записаны формулы для начального и конечного положений центра масс системы	+2 балла (по 1 баллу за каждую формулу)
4	Указано, что центр масс системы не смещается	+1 балла
5	Получена формула для смещения сосуда s	+3 балла
6	Получено отношение масс азота и водорода	+3 балла
7	Сделаны необходимые алгебраические преобразования и получена окончательная формула для смещения *s*	+2 балла
8	Указано, что сосуд сместился влево	+1 балла
9	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 6 (*18 баллов*). На горизонтальной поверхности льда находится ледяная горка, которая может скользить по поверхности льда (см. рисунок). На вершине горки покоится маленькая шайба. Масса горки в k = 8 раз больше массы шайбы. Вначале горка и шайба неподвижны. Трение пренебрежимо мало. Шайбе сообщили горизонтально направленную скорость v = 1 м/с, при которой она, соскользнув с горки и ударившись упруго о вертикальный борт, при обратном движении смогла подняться на вершину горки. При какой максимальной высоте h горки это возможно? Считать, что при движении по горке шайба не отрывается от горки, все движения шайбы и горки по горизонтальной поверхности происходят вдоль одной прямой. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



Ответ. $h=\dfrac{25v^2}{16g}=0{,}156$ м.

Решение.

Обозначим массу шайбы m, тогда масса горки $8m$. Когда шайба съезжает с горки, она приобретает скорость v_1, горка при этом движется в противоположную сторону со скоростью v_2. Эти скорости можно найти из законов сохранения энергии и проекции импульса на горизонтальную ось. После удара о бортик, скорость шайбы поменяет направление, но не модуль. Поэтому чтобы оказаться на вершине снова должно быть $v_1>v_2$. При этом, когда шайба снова окажется на вершине скорости шайбы и горки относительно земли должны быть одинаковыми (обозначим эту скорость u). Для нахождения u также применяем законы сохранения импульса и энергии. В результате получим систему.

$$\begin{cases}\dfrac{mv^2}{2}+mgh=\dfrac{mv_1^2}{2}+\dfrac{8mv_2^2}{2},\\ mv=mv_1-8mv_2,\\ \dfrac{mv_1^2}{2}+\dfrac{8mv_2^2}{2}=\dfrac{9mu^2}{2}+mgh,\\ mv_1+8mv_2=9mu.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v^2+2gh=v_1^2+8v_2^2, & (1)\\ 9u^2+2gh=v_1^2+8v_2^2, & (2)\\ v=v_1-8v_2, & (3)\\ 9u=v_1+8v_2. & (4)\end{cases}$$

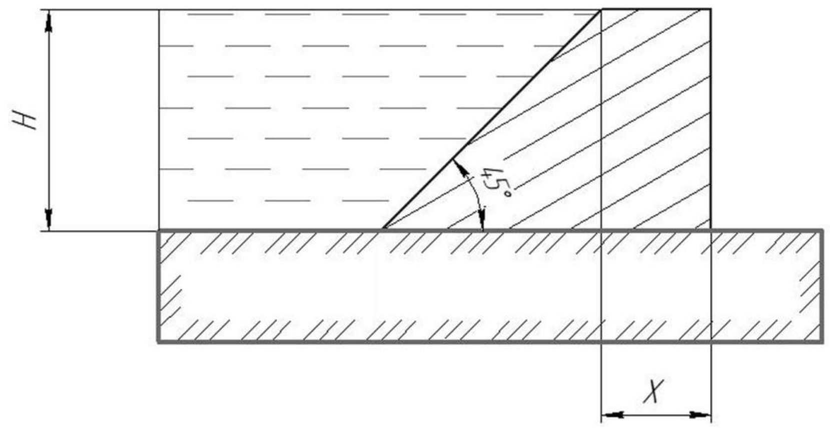
Из (1) и (2) получим $u=\dfrac{v}{3}$, затем из (3) и (4) $\Rightarrow$ $v_1=2v$, $v_2=\dfrac{v}{8}$. Подставим найденные значения v_1 и v_2 в уравнение (1), получим $h=\dfrac{25v^2}{16g}=\dfrac{25\cdot1^2}{16\cdot10}=0{,}156$ м.

Критерии оценивания задачи 6.

	Элементы решения	Баллы (макс. 18 баллов)
1	Записаны уравнения законов сохранения энергии и импульса в обоих случаях	+8 баллов (по 2 балла за каждое уравнение)
2	Указано, что при упругом отражении от бортика модуль скорости сохранится, изменится только направление	+1 балла
3	Есть понимание, что во втором случае, когда шайба на вершине горки, скорости горки и шайбы равны	+2 балла
4	Проделаны необходимые алгебраические преобразования	+6 баллов
5	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

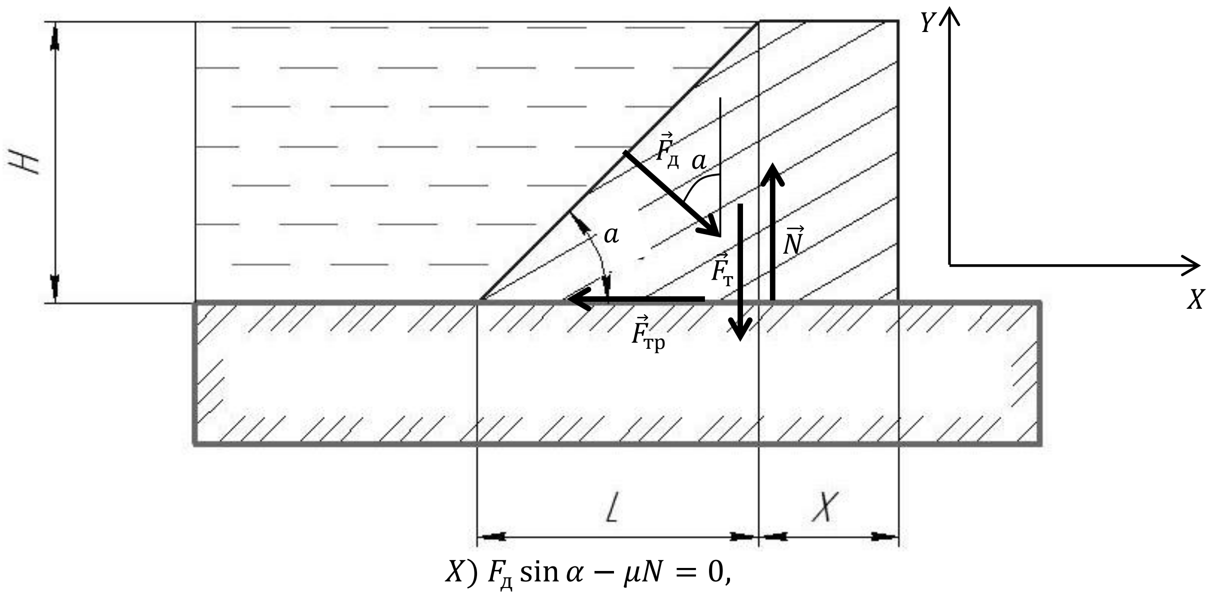
Ситуационная задача

Гравитационная плотина – это сооружение, преграждающее путь воде, удерживаемое на месте только силой трения между основанием конструкции и опорной поверхностью. Рассматриваемая плотина, горизонтальной протяженностью $a = 1$ м, выполнена из бетона, имеет поперечное сечение в форме трапеции, длина малого основания которой $X = 5{,}5$ м. "Мокрая" стенка плотины наклонена под углом 45 градусов к горизонту, а "сухая" – вертикальна, высота столба жидкости, равна высоте плотины H. Коэффициент трения между конструкцией и опорной поверхностью $\mu = 0{,}25$, плотность бетона $\rho_б = 2200$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3. Найдите минимальную высоту плотины H, при которой она будет неподвижна.



Решение:

Запишем условие равновесия плотины в проекциях на горизонтальную и вертикальную ось.



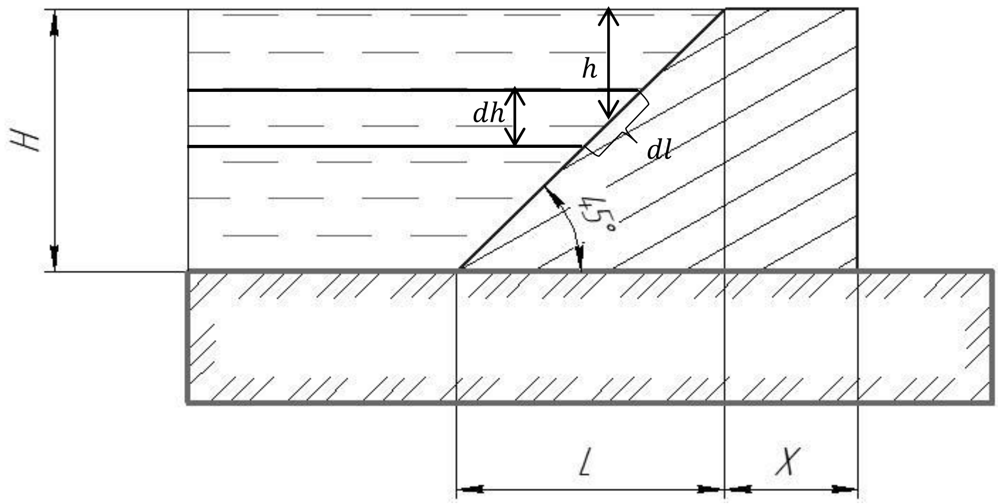
$$X)\ F_д \sin\alpha - \mu N = 0,$$

$$Y)\ F_д \cos\alpha + mg - N = 0.$$

Найдем полную силу давления воды на наклонную стенку плотины $F_д$.
Давление воды на глубине h

$$p = \rho_в g h$$

Слой воды толщиной dh давит на участок шириной dl



$$dl = \frac{dh}{\sin\alpha}$$

с силой

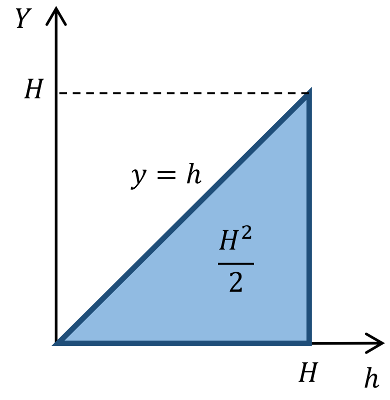
$$dF_д = pds = \rho_в g h a \cdot dl = \rho_в g h a \frac{dh}{\sin\alpha}$$

тогда полная сила давления

$$F_д = \sum_{h=0}^{H} \rho_в g h a\ \frac{dh}{\sin\alpha} = \frac{\rho_в g a}{\sin\alpha} \sum_{h=0}^{H} h\ dh.$$

$$\sum_{h=0}^{H} h\ dh = \frac{H^2}{2}.$$

Также можно решить графически – как площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y(h) = h$.



Таким образом, полная сила давления воды на поверхность плотины

$$F_{д} = \frac{\rho_{в} g a H^2}{2\sin\alpha}$$

Решая систему, находим массу

$$m = \frac{\rho_{в} a H^2}{2\mu}\big(1 - \mu(ctg\alpha)\big).$$

С другой стороны, масса плотины

$$m = \rho_{б} V = \rho_{б} a H \frac{(L + 2X)}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что $L = H\ \mathrm{ctg}\,\alpha$,

$$H = \frac{2X}{\left(\frac{\rho_{в}}{\rho_{б}}\left(\frac{1 - \mu \mathrm{ctg}\,\alpha}{\mu}\right) - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)}$$

Проанализирует полученное выражение. Точки минимума для Н не существует, так как в знаменателе стоят постоянные величины, изменяться может только Х. Следовательно, при любом значении высоты плотины Н>0 она будет не подвижна. Расчитаем предельное значение высоты плотины:

$$H = \frac{2X}{\left(\frac{\rho_{в}}{\rho_{б}}\left(\frac{1 - \mu \mathrm{ctg}\,\alpha}{\mu}\right) - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)} = 31{,}4 \text{ м}.$$

Ответ: минимальная высота плотины Н>0.