Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

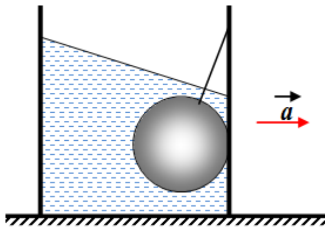
Профиль: Физика

Вариант: 1 Класс: 10

Задача 1. (8 баллов). Небольшой камень бросили с края площадки, находящейся на высоте h = 20 м от поверхности земли под некоторым углом к горизонту. Время полета камня вверх до максимальной высоты на Δt = 1 с меньше, чем время его падения вниз до столкновения с землей. Сколько всего времени двигался камень? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

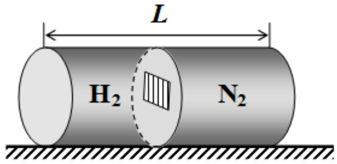
Задача 2. (8 баллов). Для исследования некоторой планеты по круговой орбите вокруг нее с постоянной скоростью движется искусственный спутник, совершая полный оборот за время T_1 = 4 часа. В результате маневра спутник переходит на другую круговую орбиту, на которой его скорость увеличилась в 2 раза. Как и на сколько часов изменился период обращения спутника по новой орбите?

Задача 3. (14 баллов). Сосуд, имеющий форму прямоугольной призмы, заполнен водой. К боковой стенке сосуда подвешен на нити железный шарик, диаметр которого равен длине нити (см. рисунок). Трение шарика о стенку пренебрежимо мало. Сосуд движется с постоянным ускорением по горизонтальной поверхности, шарик при этом не касается дна сосуда и остается полностью погруженным в воду. При каких значениях ускорения а шарик не будет давить на стенку? Плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, плотность железа $\rho_ж = 7{,}9\cdot10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



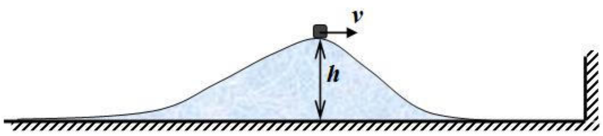
Задача 4. (14 баллов). С ν = 1 моль идеального одноатомного газа совершают некоторый политропный процесс, в результате которого газ переходит из состояния с начальными давлением $p_1 = 4\cdot10^6$ Па и абсолютной температурой T_1 = 400 К в состояние с давлением $p_2 = 6\cdot10^6$ Па и абсолютной температурой T_2 = 900 К. Какое количество тепла получает газ в этом процессе? Связь давления p и объема V в политропном процессе описывается формулой pV^n = const, где показатель политропы n – некоторое действительное число. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

Задача 5. (18 баллов). На гладком горизонтальном столе покоится цилиндрический сосуд длиной L = 36 см. Сосуд разделен на две равные части неподвижной перегородкой, в которой имеется полупроницаемая мембрана; пропускающая молекулы водорода и не пропускающая молекулы азота (см. рисунок). Вначале мембрана закрыта, а сосуд заполнен в левой части водородом, а в правой – азотом. После открытия мембраны и установления теплового равновесия, давление в правой части сосуда оказалось в n = 1,5 раза больше, чем в левой. В какую сторону и на какое расстояние сдвинется при этом сосуд? Массой сосуда и перегородки пренебречь. Температуру газов за все время наблюдения считать одинаковой и неизменной.

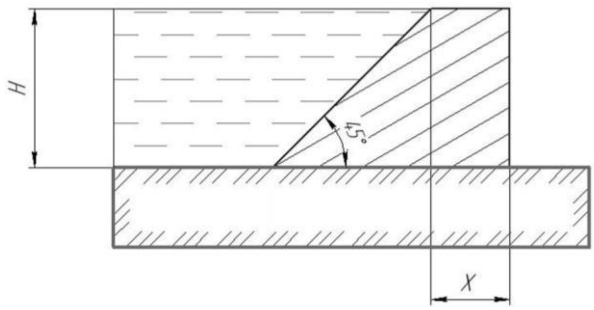


Продолжение билета см. на обороте.

Задача 6. (18 баллов). На горизонтальной поверхности льда находится ледяная горка высотой $h = 0{,}6$ м, которая может скользить по поверхности льда (см. рисунок). На вершине горки покоится маленькая шайба. Масса горки в $k = 3$ раза больше массы шайбы. Вначале горка и шайба неподвижны. Трение пренебрежимо мало. Какую минимальную горизонтально направленную скорость необходимо сообщить шайбе, чтобы она после того, как соскользнет с горки и ударится упруго о вертикальный бортик, смогла бы подняться на вершину горки при обратном движении? Считать, что при движении по горке шайба не отрывается от неё, все движения шайбы и горки по горизонтальной поверхности происходят вдоль одной прямой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ситуационная задача (20 баллов) Гравитационная плотина – это сооружение, преграждающее путь воде, удерживаемое на месте только силой трения между основанием конструкции и опорной поверхностью. Рассматриваемая плотина, горизонтальной протяженностью $a = 1$ *м,* выполнена из бетона, имеет поперечное сечение в форме трапеции, "мокрая" стенка которой наклонена под углом 45 градусов к горизонту, а "сухая" стенка вертикальная. Коэффициент трения между конструкцией и опорной поверхностью $\mu = 0{,}25$, высота столба жидкости, равная высоте плотины, $H = 50$ м, плотность бетона $\rho_б = 2200$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3. Найдите минимальную длину малого основания плотины X, обеспечивающую её неподвижность.



Критерии оценивания олимпиадной работы

Профиль: Физика («Профессор Жуковский»)
Предмет: Физика
Класс: 10, вариант 1

Задание 1 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Записана формула для времени подьема t1	1
Записана формула для нахождения t2 (или как альтернатива формула для полного времени движения T)	2
Записаны все уравнения, необходимые для решения задачи	2
Проделаны необходимые алгебраические преобразования	2
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание 2 (максимальная оценка 8 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Записана формула связи скорости и периода (или любая другая аналогичная формула кинематики движения по окружн.)	1
Записан закон всемирного тяготения	1
Записан второй закон Ньютона при движении по окружности	2
Проделаны необходимые алгебраические преобразования	2
Указано, что период уменьшился	1
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание 3 (максимальная оценка 14 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Сделан рисунок, с правильными направлениями всех сил	1
Пояснено, почему сила натяжения нити проходит через центр шара	2
Указано, что сила Архимеда имеет не только вертикальную, но и горизонтальную составляющую и правильно записаны формулы для силы Архимеда	2
Записаны уравнения динамики для шара	2
Получено значение угла наклона нити (или любой из тригонометрических функций этого угла)	2
Проделаны необходимые алгебраические преобразования	4
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ (в виде неравенства)	1

Задание 4 (максимальная оценка 14 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Записано уравнение состояния идеального газа	1
Записана формула первого закона Термодинамики	1
Записана формула для изменения внутренней энергии	1
Получено значение показателя политропы n	4
Получено выражения для работы	4
Получено выражение для расчета Q	2
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание 5 (максимальная оценка 18 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Получены выражения для парциальных давлений и водорода и азота	2
Записаны формулы для давления в левой и правой частях сосуда	2
Записаны формулы для начального и конечного положений центра масс системы	2
Указано, что центр масс системы не смещается	1
Получена формула для смещения сосуда s	3
Получено отношение масс азота и водорода	4
Сделаны необходимые алгебраические преобразования и получена окончательная формула для смещения s	2
Указано, что сосуд сместился влево	1
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание 6 (максимальная оценка 18 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Записаны уравнения законов сохранения энергии и импульса в обоих случаях	8
Указано, что при упругом отражении от бортика модуль скорости сохранится, изменится только направление	1
Есть понимание, что во втором случае, когда шайба на вершине горки, скорости горки и шайбы равны	2
Проделаны необходимые алгебраические преобразования	6
Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	1

Задание C (максимальная оценка 20 б.)

Критерий (указать балл по каждому критерию)	**Макс. балл**
Сформулирована расчётная схема (в том числе, графически), выделены и правильно формализованы все необходимые физические законы	5
Составлена система уравнений и математическая модель	5
Верно учтены технические параметры, характеристики и ограничения	5
Проведены расчеты, получен верный ответ, разумный с точки зрения физического смысла	5

Решения

Задача 1 (*8 баллов*). Небольшой камень бросили с края площадки, находящейся на высоте h = 20 м от поверхности земли под некоторым углом к горизонту. Время полета камня вверх до максимальной высоты на Δt = 1 с меньше, чем время его падения вниз до столкновения с землей. Сколько всего времени двигался камень? Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ. $T = \frac{2h}{g\Delta t} = 4$ с.

Решение.

Обозначим h_{max} – максимальную высоту подъема камня, t_1 – время движения камня вверх до максимальной высоты, t_2 – время падения с точки максимального подъема до земли. Тогда $h_{\max} - h = \frac{gt_1^2}{2}$, $h_{\max} = \frac{gt_2^2}{2}$. Вычитая из второго уравнения первое, получим $h = \frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}{2} = \frac{g}{2}\Delta t \cdot T$, $\Rightarrow T = \frac{2h}{g\Delta t} = \frac{2 \cdot 20}{10 \cdot 1} = 4$ с.

Возможны другие (альтернативные) решения задачи. Например, можно выразить время подъема t_1 и полное время движения T через вертикальную проекцию начальной скорости v_{0y}, а затем найти v_{0y}.

Критерии оценивания задачи 1.

	Элементы решения	Баллы (макс. 8 баллов)
1	Записана формула для времени подъема t_1	+1 балла
2	Записана формула для нахождения t_2 (или как альтернатива формула для полного времени движения T)	+2 балла
3	Записаны все уравнения, необходимые для решения задачи	+2 балла
4	Проделаны необходимые алгебраические преобразования	+2 балла
5	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 2 (*8 баллов*). Для исследования некоторой планеты по круговой орбите вокруг нее с постоянной скоростью движется искусственный спутник, совершая полный оборот за время T_1 = 4 часа. В результате маневра спутник переходит на другую круговую орбиту, на которой его скорость увеличилась в 2 раза. Как и на сколько часов изменился период обращения спутника по новой орбите?

Ответ. Период уменьшится на ΔT = 3,5 ч.

Решение.

1)Запишем уравнения движения спутника по круговой орбите радиуса r.

$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, где m – масса спутника, M – масса планеты, v – скорость движения спутника по орбите.

2) Связь скорости v и периода обращения T. $v = \frac{2\pi r}{T}$.

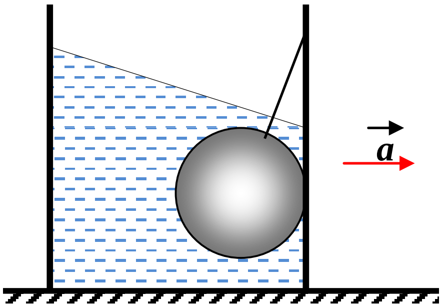
Из этих уравнений $\Rightarrow T = \frac{2\pi GM}{v^3}$.

Если скорость v увеличится в 2 раза, то период обращения уменьшится в 8 раз. Т.е период обращения станет равным $T_2 = \frac{T_1}{8}$ = 0,5 ч. Значит, период уменьшится на ΔT = 3,5 ч.

Критерии оценивания задачи 2.

	Элементы решения	Баллы (макс. 8 баллов)
1	Записана формула связи скорости и периода (или любая другая аналогичная формула кинематики движения по окружн.)	+1 балла
2	Записан закон всемирного тяготения	+1 балла
3	Записан второй закон Ньютона при движении по окружности	+2 балла
4	Проделаны необходимые алгебраические преобразования	+2 балла
5	Указано, что период уменьшился	+1 балл
6	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 3 (*14 баллов*). Сосуд, имеющий форму прямоугольной призмы, заполнен водой. К боковой стенке сосуда подвешен на нити железный шарик, диаметр которого равен длине нити (см. рисунок). Трение шарика о стенку пренебрежимо мало. Сосуд движется с постоянным ускорением по горизонтальной поверхности, шарик при этом не касается дна сосуда и остается полностью погруженным в воду. При каких значениях ускорения *a* шарик не будет давить на стенку?

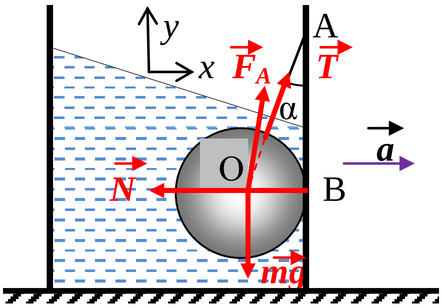


Плотность воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3, плотность железа $\rho_ж = 7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Ответ. $a \geq \dfrac{g}{2\sqrt{2}} = 3{,}5$ м/с^2.

Решение.

1) Силы, действующие на шарик, показаны на рисунке, и проходят через центр шара. Если бы сила натяжения нити $\vec{T}$ не проходила бы через центр О, то относительно оси, проходящей через точку О, эта единственная сила создавала бы ненулевой вращательный момент и шар бы вращался до тех пор, пока положение нити, не оказалось бы проходящим через центр шара.



2) Сила Архимеда, в случае, когда сосуд движется с горизонтальным ускорением $\vec{a}$, направлена не вертикально, а перпендикулярно свободной поверхности жидкости и определяется формулой $\vec{F}_A = \rho_в V(\vec{a} - \vec{g})$, где $\rho_в$ – плотность воды, V – объём шара.

3) Предположим, что шарик давит на стенку, тогда можно записать уравнения динамики шарика в проекциях на оси координат.

$$\begin{cases} x: T\sin\alpha + F_{Ax} - N = ma, \\ T\cos\alpha + F_{Ay} - mg = 0. \end{cases}$$

Проекции силы Архимеда на оси координат равны $F_{Ax} = \rho_в Va$ и $F_{Ay} = \rho_в Vg$.

Решаем полученную систему. $\Rightarrow$ $(m - \rho_в V)g \operatorname{tg}\alpha = (m - \rho_в V)a + N$.

Т.к. плотность шарика больше плотности воды, то $m > \rho_в V$. Условие того, что шар давит на стенку: $N > 0$. Тогда, чтобы шар давил на стену в процессе движения, должно выполняться неравенство $N = (m - \rho_в V)(g \operatorname{tg}\alpha - a) > 0$. Откуда, с учетом того, что $m > \rho_в V$, $\Rightarrow$

$a < g\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Соответственно, чтобы шарик не давил на стенку сосуда, должно быть $a \geq g\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

4) Из геометрии получим значение $\mathrm{tg}\,\alpha$. По условию в треугольнике ОАВ катет $OB = R$, гипотенуза $OA = 3R$, тогда второй катет $AB = \sqrt{(3R)^2 - R^2} = 2R\sqrt{2}$. $\Rightarrow$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Окончательно получим $a \geq \dfrac{g}{2\sqrt{2}} = 3{,}54$ м/с^2.

Критерии оценивания задачи 3.

	Элементы решения	Баллы (макс. 14 баллов)
1	Сделан рисунок, с правильными направлениями всех сил	+1 балл
2	Пояснено, почему сила натяжения нити проходит через центр шара	+2 балла
3	Указано, что сила Архимеда имеет не только вертикальную, но и горизонтальную составляющую и правильно записаны формулы для силы Архимеда	+2 балла
4	Записаны уравнения динамики для шара	+2 балла (по 1 баллу за каждую формулу)
5	Получено значение угла наклона нити (или любой из тригонометрических функций этого угла)	+2 балла
6	Проделаны необходимые алгебраические преобразования	+4 балла
7	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ (в виде неравенства)	+1 балл

Задача 4 (*14 баллов*). С ν = 1 моль идеального одноатомного газа совершают некоторый политропный процесс, в результате которого газ переходит из состояния с начальными давлением $p_1 = 4{\cdot}10^6$ Па и абсолютной температурой $T_1 = 400$ К в состояние с давлением $p_2 = 6{\cdot}10^6$ Па и абсолютной температурой $T_2 = 900$ К. Какое количество тепла получает газ в этом процессе? Связь давления p и объема V в политропном процессе описывается формулой $pV^n = const$, где показатель политропы n – некоторое действительное число. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).
Ответ. $Q = 2\nu R(T_2 - T_1) = 8{,}31$ кДж.

Решение.

1) Найдем показатель политропы n. Для этого запишем уравнение политропного процесса и уравнение состояния идеального газа, и найдем связь давления и температуры для политропного процесса.

$$\begin{cases} pV^n = c = const, \\ pV = \nu RT. \end{cases} \Rightarrow\ p^{1-n}T^n = const\,, \Rightarrow\ p_1^{1-n}T_1^n = p_2^{1-n}T_2^n\,, \Rightarrow\ \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-n} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^n$$

Подставим в последнюю формулу числовые значения. Тогда

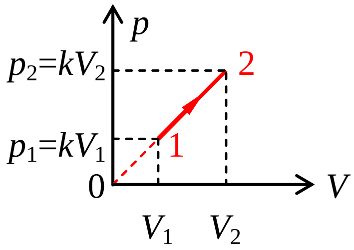
$$\left(\frac{4\cdot10^6}{6\cdot10^6}\right)^{1-n} = \left(\frac{900}{400}\right)^n, \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{1-n} = \left(\frac{9}{4}\right)^n, \Rightarrow 1-n = -2n\,, \Rightarrow\ n = -1\,.$$

Таким образом, заданный процесс имеет вид $p = kV$, где $k = const$ (см. рисунок).

2) Тогда работа газа равна $A = \dfrac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \dfrac{1}{2}k\left(V_2^2 - V_1^2\right)$.

Воспользуемся уравнениями состояний 1 и 2, которые запишем в виде: $p_1V_1 = kV_1^2 = \nu RT_1$ и $p_2V_2 = kV_2^2 = \nu RT_2$.

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\nu R(T_2 - T_1)$.



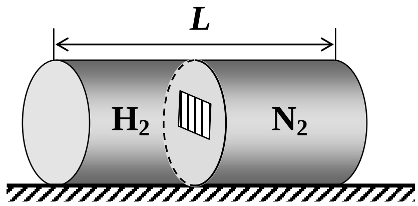
Изменение внутренней энергии $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$.

Тогда $Q = \Delta U + A = 2\nu R(T_2 - T_1) = 2 \cdot 1 \cdot 8{,}31 \cdot (900 - 400) = 8{,}31$ кДж.

Критерии оценивания задачи 4.

	Элементы решения	Баллы (макс. 14 баллов)
1	Записано уравнение состояния идеального газа	+1 балл
2	Записана формула первого закона Термодинамики	+1 балл
3	Записана формула для изменения внутренней энергии	+1 балл
4	Получено значение показателя политропы *n*	+4 балла
5	Получено выражения для работы	+4 балла
6	Получено выражение для расчета Q	+2 балла
7	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 5 (*18 баллов*). На гладком горизонтальном столе покоится цилиндрический сосуд длиной L = 36 см. Сосуд разделен на две равные части неподвижной перегородкой, в которой имеется полупроницаемая мембрана; полупроницаемая мембрана пропускает молекулы водорода и не пропускает молекулы азота (см. рисунок).



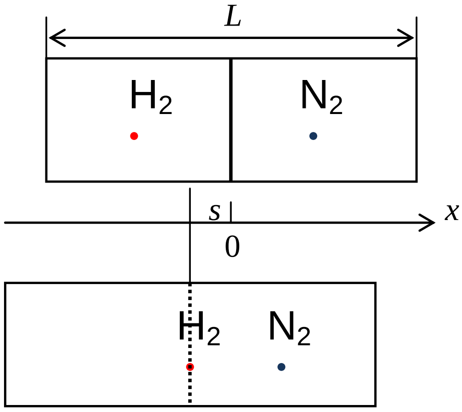
Вначале мембрана закрыта, а сосуд заполнен в левой части водородом, а в правой – азотом. После открытия мембраны и установления теплового равновесия, давление в правой части сосуда оказалось в n = 1,5 раза больше, чем в левой. В какую сторону и на какое расстояние сдвинется при этом сосуд? Массой сосуда и перегородки пренебречь. Температуру газов за все время наблюдения считать одинаковой и неизменной. Молярные массы водорода и азота равны соответственно $\mu_в$ = 2 г/моль, $\mu_а$ = 28 г/моль.

Ответ. Сосуд сместится влево на $s = \dfrac{L}{4\left(1 + \dfrac{(n-1)\mu_a}{2\mu_в}\right)} = 2$ см.

Решение

1) Обозначим V – объём сосуда, m_1 – масса водорода H_2, m_2 – масса азота N_2. Вначале центр масс водорода и азота находился посредине каждой половинки сосуда. Тогда центр масс системы имеет координату (см. первый рисунок) $x_{ц.м.}^{нач.} = \dfrac{m_1\left(-\dfrac{L}{4}\right) + m_2\dfrac{L}{4}}{m_1 + m_2}$.

После открытия мембраны водород займет весь сосуд, и его центр масс будет находиться посредине сосуда, а положение центра масс азота не изменится, при этом будем считать, что сосуд сдвинулся влево на s (см. второй рисунок). При этом положение центра системы определяется формулой $x_{ц.м.}^{кон.} = \dfrac{m_1(-s) + m_2\left(\dfrac{L}{4} - s\right)}{m_1 + m_2}$. На систему не действуют внешние силы в горизонтальном направлении, поэтому $x_{ц.м.}^{кон.} = x_{ц.м.}^{нач.}$. $\Rightarrow s = \dfrac{m_1 L}{4(m_1 + m_2)}$.



2). Чтобы найти отношение масс газов, посчитаем давления в правой и в левой частях сосуда после открытия мембраны и установления теплового равновесия. Давление в левой части сосуда равно $p_{лев.} = p_в = \dfrac{m_1 RT}{\mu_в V}$, а в правой – $p_{пр.} = p_в + p_а = \dfrac{m_1 RT}{\mu_в V} + \dfrac{2m_2 RT}{\mu_а V}$.

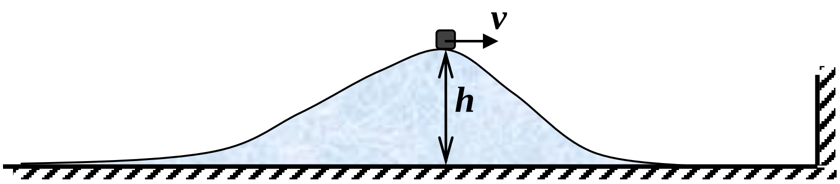
По условию $\dfrac{p_{пр.}}{p_{лев.}} = n = 1{,}5$. $\Rightarrow \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{(n-1)\mu_а}{2\mu_в} = \dfrac{0{,}5\cdot 28}{2\cdot 2} = 3{,}5$.

Тогда $s = \dfrac{L}{4\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)} = \dfrac{36}{4\cdot(1+3{,}5)} = 2$ см.

Критерии оценивания задачи 5.

	Элементы решения	Баллы (макс. 18 баллов)
1	Получены выражения для парциальных давлений и водорода и азота	+2 балла (по 1 баллу за каждую формулу)
2	Записаны формулы для давления в левой и правой частях сосуда	+2 балла (по 1 баллу за каждую формулу)
3	Записаны формулы для начального и конечного положений центра масс системы	+2 балла (по 1 баллу за каждую формулу)
4	Указано, что центр масс системы не смещается	+1 балла
5	Получена формула для смещения сосуда s	+3 балла
6	Получено отношение масс азота и водорода	+4 балла
7	Сделаны необходимые алгебраические преобразования и получена окончательная формула для смещения *s*	+2 балла
8	Указано, что сосуд сместился влево	+1 балла
9	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

Задача 6 (*18 баллов*). На горизонтальной поверхности льда находится ледяная горка высотой h = 0,6 м, которая может скользить по поверхности льда (см. рисунок). На вершине горки покоится маленькая шайба. Масса горки в k = 3 раза больше массы шайбы. Вначале горка и шайба неподвижны. Трение пренебрежимо мало. Какую минимальную горизонтально направленную скорость необходимо сообщить шайбе, чтобы она после того, как соскользнет с горки и ударится упруго о вертикальный бортик, смогла бы подняться на вершину горки при обратном движении? Считать, что при движении по горке шайба не отрывается от горки, все движения шайбы и горки по горизонтальной поверхности происходят вдоль одной прямой. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



Ответ. $v = \sqrt{\dfrac{gh}{3}} = 1,4$ м/с.

Решение.

Обозначим массу шайбы m, тогда масса горки $3m$. Когда шайба съезжает с горки, она приобретает скорость v_1, горка при этом движется в противоположную сторону со скоростью v_2. Эти скорости можно найти из законов сохранения энергии и проекции импульса на горизонтальную ось. После удара о бортик, скорость шайбы поменяет направление, но не модуль. Поэтому чтобы оказаться на вершине снова должно быть $v_1 > v_2$. При этом, когда шайба снова окажется на вершине скорости шайбы и горки относительно земли должны быть одинаковыми (обозначим эту скорость u). Для нахождения u также применяем законы сохранения импульса и энергии. В результате получим систему.

$$\begin{cases} \dfrac{mv^2}{2} + mgh = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{3mv_2^2}{2}, \\ mv = mv_1 - 3mv_2, \\ \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{3mv_2^2}{2} = \dfrac{4mu^2}{2} + mgh, \\ mv_1 + 3mv_2 = 4mu. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 + 2gh = v_1^2 + 3v_2^2, & (1) \\ 4u^2 + 2gh = v_1^2 + 3v_2^2, & (2) \\ v = v_1 - 3v_2, & (3) \\ 4u = v_1 + 3v_2. & (4) \end{cases}$$

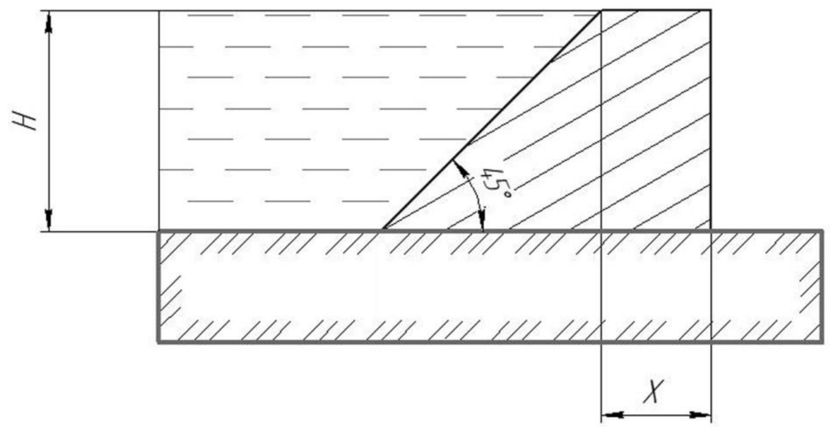
Из (1) и (2) получим $u = \dfrac{v}{2}$, затем из (3) и (4) $\Rightarrow$ $v_1 = \dfrac{3v}{2}$, $v_2 = \dfrac{v}{6}$. Подставим найденные значения v_1 и v_2 в уравнение (1), получим $v = \sqrt{\dfrac{gh}{3}} = \sqrt{\dfrac{10 \cdot 0,6}{3}} = 1,4$ м/с.

Критерии оценивания задачи 6.

	Элементы решения	Баллы (макс. 18 баллов)
1	Записаны уравнения законов сохранения энергии и импульса в обоих случаях	+8 баллов (по 2 балла за каждое уравнение)
2	Указано, что при упругом отражении от бортика модуль скорости сохранится, изменится только направление	+1 балла
3	Есть понимание, что во втором случае, когда шайба на вершине горки, скорости горки и шайбы равны	+2 балла
4	Проделаны необходимые алгебраические преобразования	+6 баллов
5	Сделаны подстановки числовых значений и получен правильный ответ	+1 балл

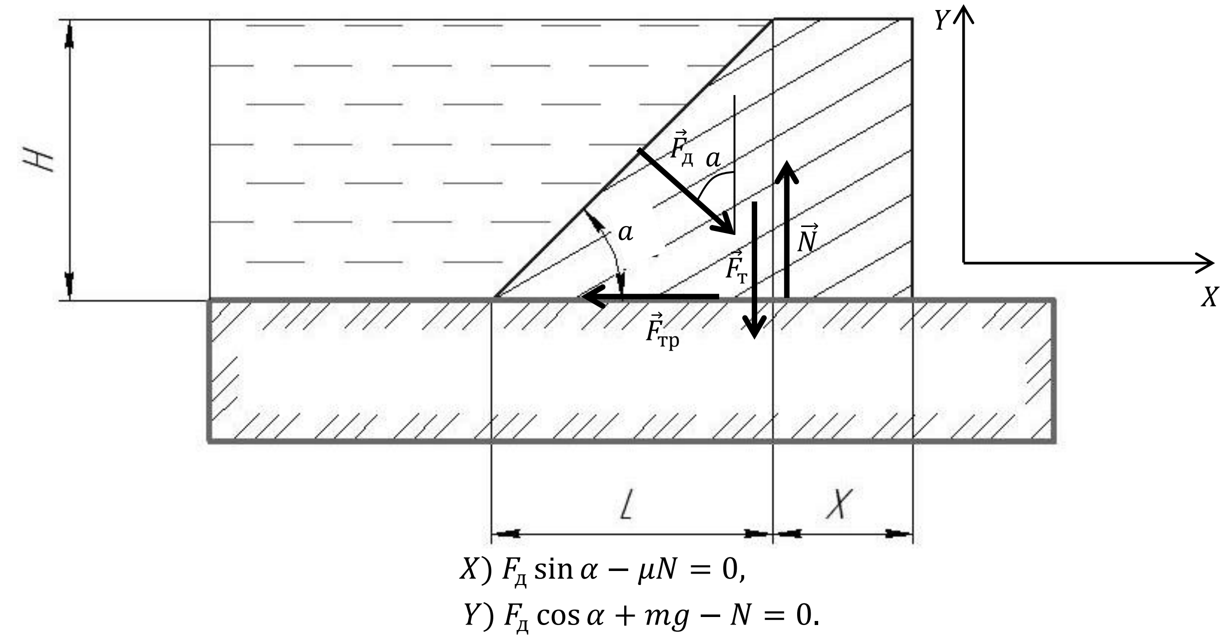
Ситуационная задача

Гравитационная плотина – это сооружение, преграждающее путь воде, удерживаемое на месте только силой трения между основанием конструкции и опорной поверхностью. Рассматриваемая плотина, горизонтальной протяженностью $a = 1$ м, выполнена из бетона, имеет поперечное сечение в форме трапеции, "мокрая" стенка которой наклонена под углом 45 градусов к горизонту, а "сухая" стенка вертикальная. Коэффициент трения между конструкцией и опорной поверхностью $\mu = 0{,}25$, высота столба жидкости, равная высоте плотины, $H = 50$ м, плотность бетона $\rho_б = 2200$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3. Найдите минимальную длину малого основания плотины X, обеспечивающую её неподвижность.



Решение:

Запишем условие равновесия плотины в проекциях на горизонтальную и вертикальную ось.

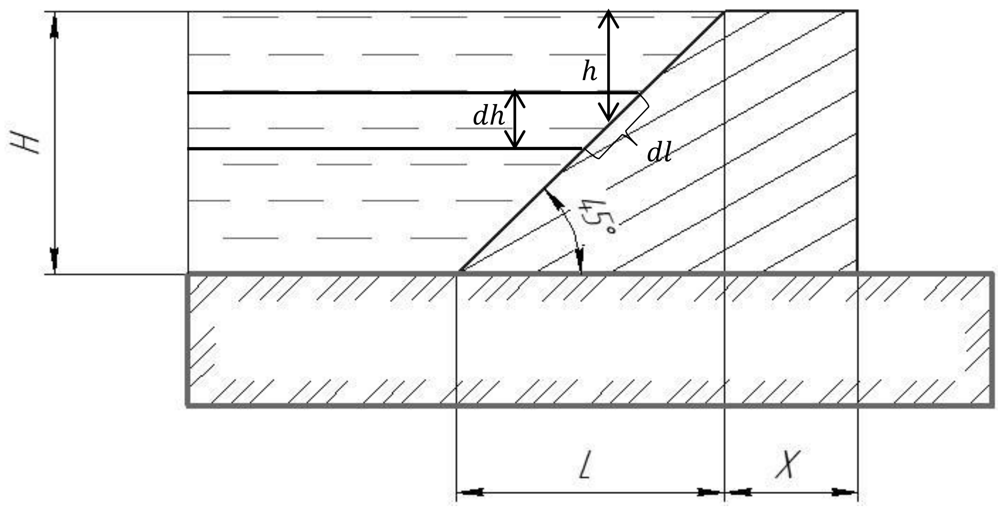


$$X)\ F_д \sin\alpha - \mu N = 0,$$
$$Y)\ F_д \cos\alpha + mg - N = 0.$$

Найдем полную силу давления воды на наклонную стенку плотины $F_д$.
Давление воды на глубине h

$$p = \rho_в g h$$

Слой воды толщиной dh давит на участок шириной dl



$$dl = \frac{dh}{\sin\alpha}$$

с силой

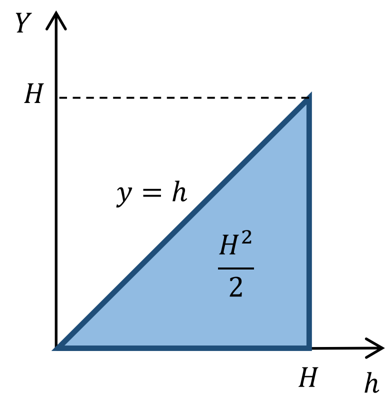
$$dF_д = pds = \rho_в gha \cdot dl = \rho_в gha\frac{dh}{\sin\alpha}$$

тогда полная сила давления

$$F_д = \sum_{h=0}^{H} \rho_в gha\ \frac{dh}{\sin\alpha} = \frac{\rho_в ga}{\sin\alpha}\sum_{h=0}^{H} h\ dh.$$

$$\sum_{h=0}^{H} h\ dh = \frac{H^2}{2}.$$

Также можно решить графически – как площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y(h) = h$.



Таким образом, полная сила давления воды на поверхность плотины

$$F_{д} = \frac{\rho_{в} g a H^2}{2\sin\alpha}$$

Решая систему, находим массу

$$m = \frac{\rho_{в} a H^2}{2\mu}\big(1 - \mu(ctg\alpha)\big).$$

С другой стороны, масса плотины

$$m = \rho_{б} V = \rho_{б} a H \frac{(L + 2X)}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что $L = H\,\mathrm{ctg}\,\alpha$,

$$X = \frac{H}{2}\left(\frac{\rho_{в}}{\rho_{б}}\left(\frac{1 - \mu\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mu}\right) - \mathrm{ctg}\,\alpha\right) = 9{,}1 \text{ м.}$$

Ответ: минимальная длина малого основания плотины $X = 9{,}1$ м.