Вариант №1

№1: (15 баллов). Решите неравенство:

$3\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt[6]{\sqrt{x^3-x}+\sqrt[4]{x-x^2}-x^3+3x-2}\le 9-6x$

Решение:

$$3\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt[6]{\sqrt{x^3-x}+\sqrt[4]{x-x^2}-x^3+3x-2}\le 9-6x \Leftrightarrow$$

$0\le 3|2x-3|+\sqrt[6]{\sqrt{x^3-x}+\sqrt[4]{x-x^2}-x^3+3x-2}\le$9-6x$\Rightarrow (3-2x)\ge 0 \Longrightarrow$ $|2x-3|=3-2x.$ Тогда это неравенство$\Leftrightarrow$

9-6x+$\sqrt[6]{\sqrt{x^3-x}+\sqrt[4]{x-x^2}-x^3+3x-2}\le 9-6x \ \Leftrightarrow$
$\sqrt[6]{\sqrt{x^3-x}+\sqrt[4]{x-x^2}-x^3+3x-2}\le 0 \Leftrightarrow$
$\sqrt[6]{\sqrt{x^3-x}+\sqrt[4]{x-x^2}-x^3+3x-2}=0$ для решения этого уравнения

должны выполняться условия:$\begin{cases}x^3-x\ge 0\\ x-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 0\cup 1\le x\le +\infty\\ 0\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$.Подставим эти значения в уравнение. x=1-решение.

Ответ: 1

Критерии.

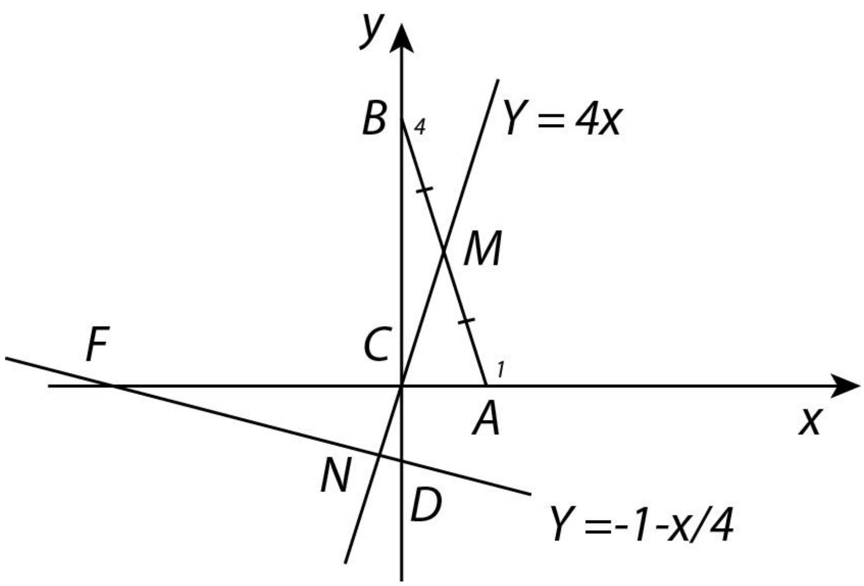
Баллы	
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
4	Верно начато решение задачи (неравенство сведено к уравнению), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№2: (15 баллов). Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты ACDE и BCFG. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину отрезка CN, если длины катетов равны 1 и 4.

Решение (первый способ)

Введем систему координат с началом в точке C, осью абсцисс CA и осью ординат CB. Тогда A(1,0), B (0,4), D(0,-1), F(-4,0), и точка N(x_0, y_0)- лежит на пересечении прямых (CM) и (FD). Из ΔACM следует, что tg$\angle MCA =$

$4 \Longrightarrow$уравнение прямой (CM) есть $y = 4x$. Пусть уравнение прямой (FD): $y = kx + b$. Из ΔFCD следует, что k=-$\frac{1}{4}$, b=-1и (FD): $y = -\frac{1}{4}x - 1$.

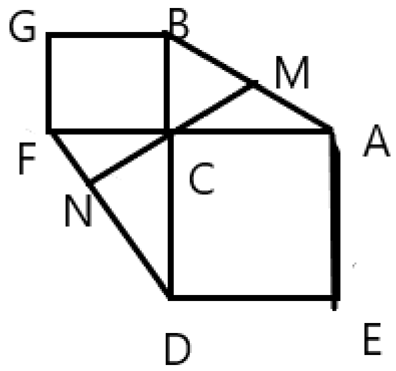


Координаты точки N должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} y_0 = 4x_0 \\ y_{0=-1-\frac{x_0}{4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{4}{17} \\ y_0 = -\dfrac{16}{17} \end{cases} \Rightarrow CN = \sqrt{x_0^2 + (4x_0)^2} = \sqrt{17}|x_0|$$
$$= \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{17}}$

Решение (второй способ)



$\Delta DCF = \Delta ACB$ (по двум сторонам и углу между ними). Пусть $\angle BAC = \beta$. Тогда $\angle FDC = \beta$. По свойству медианы прямоугольного треугольника, CM=AM=BM $\Longrightarrow$ треугольник AMC – равнобедренный $\Longrightarrow$ $\angle MAC = \angle MCA$. $\angle FCN = \angle MCA$ (как вертикальные) $\Longrightarrow$ $\angle FCN = \angle MAC = \angle BAC = \beta$. Т.к. $\angle FCD = 90°$, то $\angle NCD = 90° - \beta$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника (NCD) $\angle CND = 90°$, т.е. CN – высота прямоугольного треугольника FCD $\Longrightarrow$ $CN = \dfrac{FC \cdot CD}{DF} = \dfrac{1 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

Ответ: $\dfrac{4}{\sqrt{17}}$.

Критерии:

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку.
6	Верно построен рисунок и найдены координаты одной из точек (при аналитическом решении) или доказано, что продолжение медианы CM перпендикулярно прямой DF (CN – высота треугольника DCF).
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№3: (15 баллов). Школьник Иванов проплывает на плоту путь между городами A и B за 15 часов. На моторной лодке вместе с папой он проплывает весь путь от A до B и обратно не менее чем за 8 часов. Точно такое же путешествие, но вместе с дедушкой (от A до B и обратно) занимает по времени не более 20 часов, при этом собственная скорость лодки при управлении дедушкой на 50% меньше, чем у папы. Сколько часов школьник вместе с дедушкой плывут на моторной лодке от города A до города B?

Решение:

Пусть S - расстояние между городами A и B, v - скорость течения реки и плота, u - собственная скорость лодки при управлении папой. Тогда собственная скорость лодки при управлении дедушкой равна $0,5u$. Согласно условию задачи получаем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{S}{v}=15\\[2mm] \dfrac{S}{u+v}+\dfrac{S}{u-v}\ge 8\\[2mm] \dfrac{S}{0,5u+v}+\dfrac{S}{0,5u-v}\le 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{S}{v}=15\\[2mm] \dfrac{15v}{u+v}+\dfrac{15v}{u-v}\ge 8\\[2mm] \dfrac{15v}{0,5u+v}+\dfrac{15v}{0,5u-v}\le 20\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{S}{v}=15\\[2mm] \dfrac{15}{\frac{u}{v}+1}+\dfrac{15}{\frac{u}{v}-1}\ge 8\\[2mm] \dfrac{15}{0,5\frac{u}{v}+1}+\dfrac{15}{0,5\frac{u}{v}-1}\le 20\end{cases}$$

Сделаем замену $\dfrac{u}{v}=x$ и решим систему неравенств относительно x, в процессе решения учтём, что $x=\dfrac{u}{v}>1$:

$$\begin{cases}\dfrac{15}{x+1}+\dfrac{15}{x-1}\ge 8\\[2mm] \dfrac{15}{0,5x+1}+\dfrac{15}{0,5x-1}\le 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}30x\ge 8\left(x^2-1\right)\\[2mm] 30\cdot\dfrac{1}{2}x\le 20\cdot\left(\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2-1\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2-15x-4\le 0\\ x^2-3x-4\ge 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $x=4$, следовательно $\dfrac{u}{v}=4$.

Школьник вместе с дедушкой плывут на моторной лодке от города A до города B за время $\dfrac{S}{0,5u+v}=\dfrac{S}{0,5\cdot 4v+v}=\dfrac{S}{3v}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{S}{v}=\dfrac{1}{3}\cdot 15=5$

Ответ: 5.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4: (15 баллов). При каких значениях параметра a уравнение $\left|\frac{x^2-2ax+a^2+1}{x-a}\right|+x^2-6x+7=0$ имеет хотя бы одно решение?

Решение:

Преобразуем выражение под знаком модуля:

$$\left|\frac{(x-a)^2+1}{x-a}\right|+x^2-6x+7=0,$$

$$\left|x-a+\frac{1}{x-a}\right|+x^2-6x+7=0,$$

$$\left|x-a+\frac{1}{x-a}\right|=-x^2+6x-7.$$

По неравенству Коши сумма двух взаимно обратных положительных чисел всегда больше или равна 2, а отрицательных – меньше или равна -2, следовательно левая часть равенства $\left|x-a+\frac{1}{x-a}\right|\geq 2$, чтобы равенство было верным необходимо, чтобы и правая часть уравнения была больше или равна 2.

$$-x^2+6x-7\geq 2 \iff (x-3)^2\leq 0 \iff x=3.$$

Равенство возможно только при $x=3$, подставим это значение в исходное уравнение.

$$\left|\frac{a^2-6a+10}{3-a}\right|-2=0 \iff \left[\begin{array}{l}\frac{a^2-6a+10}{3-a}=2\\ \frac{a^2-6a+10}{3-a}=-2\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}a^2-6a+10=6-2a\\ a^2-6a+10=2a-6\end{array}\right. \iff$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2-4a+4=0 \\ a^2-8a+16=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=4 \end{array}\right..$$

Ответ: $a=2$ **или** $a=4$**.**

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№5: (20 баллов). Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке M, а стороны AC – в точке K. На стороне AB выбирается точка N так, что отрезок MK делит отрезок CN пополам. Найдите длину отрезка AN, если $AB=8, AC=7, BC=6$.

Решение (первый способ)

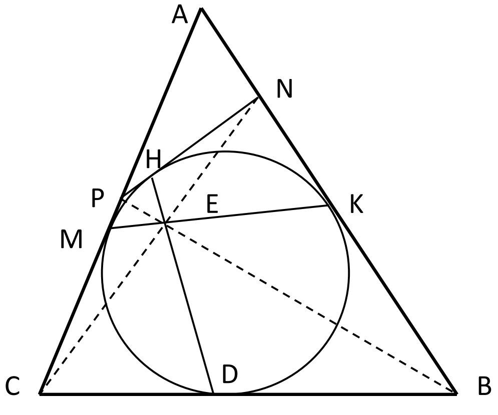
Проведем касательную к данной окружности через точку N. Она пересечет AC в точке P. Четырехугольник $BNPC$ – описанный около данной окружности.

По свойству описанного четырехугольника: отрезки MK, CN, BP и HD пересекаются в одной точке E (Теорема Брианшона), следовательно, диагональ BP четырехугольника BNPC делит его вторую диагональ пополам.

Пусть $\angle BEC=\alpha$, тогда $\angle NEP=\alpha$, $\angle BEN=\angle CEP=180^0-\alpha$. Так как $cos(180^0-\alpha)=-cos\alpha$, то по Теореме косинусов:

$$BC^2=CE^2+BE^2-2CE\cdot BE\cdot cos\alpha,\ PC^2=CE^2+PE^2+2CE\cdot PE\cdot cos\alpha,$$

$$BN^2=NE^2+BE^2+2NE\cdot BE\cdot cos\alpha,\ PN^2=NE^2+PE^2-2NE\cdot PE\cdot cos\alpha.$$



По свойству описанного четырехугольника: $BC + PN = BN + PC$ и $CE = NE =>$

$$\sqrt{CE^2 + BE^2 - 2CE \cdot BE \cdot cos\alpha} + \sqrt{CE^2 + PE^2 - 2CE \cdot PE \cdot cos\alpha} =$$

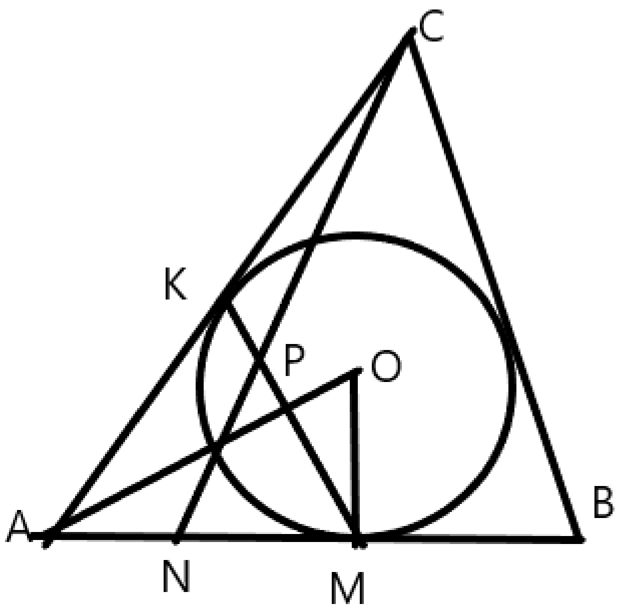
$$\sqrt{CE^2 + BE^2 + 2CE \cdot BE \cdot cos\alpha} + \sqrt{CE^2 + PE^2 + 2CE \cdot PE \cdot cos\alpha}.$$

Очевидно, что равенство возможно только при $cos\alpha = 0$. Действительно, если $cos\alpha > 0$, то левая его часть меньне правой и наоборот при $cos\alpha < 0$. Следовательно, $BP \perp CN$, т. е. BP – серединный перпендикуляр к отрезку CN. Итак треугольник BCN – равнобедренный.

$BC = BN => AN = AB - BN = AB - BC = 8 - 6 = 2.$

Ответ: 2.

Решение (второй способ)



По теореме Менелая (ΔACN, секущая КМ) $\frac{AK}{KC} \cdot \frac{CP}{PN} \cdot \frac{NM}{MA} = 1$. Пусть $AK = x$.

Тогда $AM = x$ (как две касательные из одной точки). Т.к. по условию $\frac{CP}{PN} = 1$,

то $\frac{x}{KC} = \frac{x}{NM}$, $\Longrightarrow NM = KC$. Следовательно, достаточно найти x.

$P_{ABC} = 8 + 7 + 6 = 21 \Longrightarrow p = \frac{21}{2}$.

$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (\text{p} - \text{AC}) \cdot (\text{p} - \text{BC})} = \sqrt{\frac{21}{2} \cdot (\frac{21}{2} - 8) \cdot (\frac{21}{2} - 7) \cdot (\frac{21}{2} - 6)} = \frac{21}{4}\sqrt{15}$.

$S_{ABC} = p \cdot r \quad \Longrightarrow \quad \frac{21\sqrt{15}}{4} = \frac{21}{2} \cdot r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

По теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A \Rightarrow$

$36 = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos\angle A \Rightarrow 2 \cdot 56 \cdot \cos\angle A = 77 \Rightarrow \cos\angle A = \dfrac{11}{16}$.

$$\cos\angle A = \frac{1 - tg^2 \frac{A}{2}}{1 + tg^2 \frac{A}{2}} \Rightarrow \frac{11}{16} = \frac{1 - tg^2 \frac{A}{2}}{1 + tg^2 \frac{A}{2}} \Rightarrow 27 \cdot tg^2 \frac{A}{2} = 5 \Rightarrow$$

$$tg\frac{A}{2} = \frac{5}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{9}.$$

$$tg\frac{A}{2} = \frac{r}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{15}}{9} = \frac{\sqrt{15}}{2 \cdot x} \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4{,}5 \Rightarrow AM = AK = x = 4{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KC = AC - AK = 7 - x = 7 - 4{,}5 = 2{,}5 = NM . \quad AN = AM - NM = 4{,}5 - 2{,}5 = 2$$

.

Ответ: 2

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При верном и обоснованном ходе решения разобраны не все варианты или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (обосновано и правильно расставлены точки M, N и K), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6: (20 баллов). Первый рабочий красит стандартный номер в гостинице за 1 день, а выкладывает плиткой ванную комнату за 5 дней. Второй рабочий красит стандартный номер в гостинице за 2 дня, а выкладывает плиткой ванную комнату за 8 дней. За какое минимальное количество дней они отремонтируют 30 стандартных номеров и 20 ванных комнат, если они начинают и заканчивают работать вдвоем одновременно.

Ответ: 80.

Решение.

Пусть x_1 дней первый красит, а x_2 дней кладет плитку. Аналогично, пусть y_1 дней второй красит, а y_2 дней кладет плитку. Тогда, $t = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \rightarrow min$ (*) и

$$\begin{cases} \frac{x_1}{1} + \frac{y_1}{2} = 30, \\ \frac{x_2}{5} + \frac{y_2}{8} = 20. \end{cases}$$

Решив систему с учетом (*), получим:

$x_1 = 550 - 6{,}5\mathrm{t}$; $x_2 = 7{,}5\mathrm{t} - 550$; $y_1 = 13\mathrm{t} - 1040$; $y_2 = 1040 - 12\mathrm{t}$.

По условию задачи $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ => $80 \leq t \leq 86\frac{2}{3}$, аналогично $y_1 \geq 0$ и $y_2 \geq 0$ =>

$73\frac{1}{3} \leq t \leq 84\frac{8}{13}$ => $80 \leq t \leq 84\frac{8}{13}$.

Действительно, при $\mathrm{t} = 80$ получаем решение: $x_1 = 30$; $x_2 = 50$; $y_1 = 0$; $y_2 = 80$.

Ответ: 80.

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
18	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифмитические ошибки или решение недостаточно обосновано.
12	При верном и обоснованном ходе решения найдены не все варианты.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.