Математика

9-й класс

Вариант №3

№1: (15 баллов). Решите неравенство:

$2\sqrt{(4x-9)^2}+\sqrt[4]{\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}+x^2+2x-4}\le 18-8x$

Решение.

$2\sqrt{(4x-9)^2}+\sqrt[4]{\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}+x^2+2x-4}\le 18-8x \quad \Leftrightarrow$

$2|4x-9|+\sqrt[4]{\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}+x^2+2x-4}\le 2\cdot(9-4x)$. Оба слагаемых в левой части неотрицательны, следовательно, $(9-4x)\ge 0 \Rightarrow$ $4x-9\le 0$, а значит $|4x-9|=9-4x$. Следовательно, исходное неравенство$\Leftrightarrow$

уравнению $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}-4+2x+x^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2$

Так как

$$\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}\ \ge 5 \text{ и } 5-(x+1)^2\le 5 \Rightarrow \text{расматриваемое}$$

уравнение $\Leftrightarrow$системе $\begin{cases}\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}\ =5\\ 5-(x+1)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

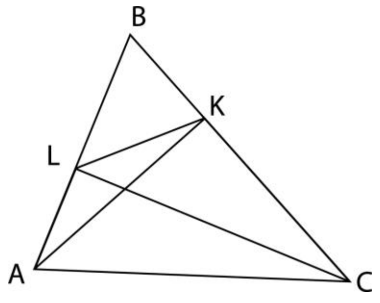
Ответ: -1

Критерии.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
4	Верно начато решение задачи (неравенство сведено к уравнению), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№2: (15 баллов). В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CL. Известно, что LK=12 и $\angle ABC=60^0$.Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение.



$\angle ALC = \angle AKC = 90^0 \Rightarrow \Delta AKB$ подобен ΔCLB

$\Rightarrow \frac{BL}{BK} = \frac{BC}{BA} \Longrightarrow \frac{BL}{BC} = \frac{BK}{BA} \Longrightarrow \Delta ABC$ подобен ΔBKL

$\Rightarrow \frac{BL}{BC} = \frac{BK}{BA} = cos\angle ABC = \frac{1}{2} = \frac{LK}{AC} \Rightarrow AC = 2LK$ =24.

Радиус окружности, описанной коло ΔABC равен R=$\frac{AC}{2sin60^0} = \frac{24}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{24}{\sqrt{3}}$

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку
6	Обоснованно доказано подобие треугольников KBL и ABC, дальнейших существенных продвижений нет.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№3: (15 баллов). Мешок Деда Мороза вмещает ровно 160 подарков для мальчиков или ровно 120 подарков для девочек. Подарки состоят из конфет. Если мешок заполнить таким образом, что суммарное число конфет в подарках для мальчиков было равно общему числу конфет в подарках для девочек, то всего в мешке будет 140 подарков и в них 4320 конфет. На сколько больше конфет было в подарке для девочек, чем в подарке для мальчиков?

Решение: Если мешок Деда Мороза вмещает ровно 160 подарков для мальчиков, то один подарок для мальчиков занимает $\frac{1}{160}$ часть мешка, и, аналогично, подарок для девочек занимает $\frac{1}{120}$ часть мешка.

Пусть всего в мешке оказалось n подарков для мальчиков и m подарков для девочек, в подарке для мальчиков a конфет, а в подарке для девочек b конфет. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{n}{160}+\dfrac{m}{120}=1 \\ n+m=140 \\ an=bm=2160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=80 \\ m=60 \\ a\cdot 80=b\cdot 60=2160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=80 \\ m=60 \\ a=27 \\ b=36 \end{cases}$$

$b-a=36-27=9$

Ответ: 9.

Критерии.

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4: (15 баллов). Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\left(a+x^2-x+2\right)^2=4a\left(ax^2+x^2-x+2\right)$ имеет единственное решение.

Решение: Введём замену $t=x^2-x+2$, тогда уравнение примет вид

$$\left(a+t\right)^2=4a\left(ax^2+t\right)$$

$$\left(a-t\right)^2-\left(2ax\right)^2=0$$

$$\left(t-a-2ax\right)\left(t-a+2ax\right)=0$$

$$\left(x^2-x+2-a-2ax\right)\left(x^2-x+2-a+2ax\right)=0$$

Уравнение распадается на два квадратных уравнения $x^2-x+2-a-2ax=0$ и $x^2-x+2-a+2ax=0$, и имеет одно решение, если дискриминант одного из уравнений равен нулю, а второго отрицательный или наоборот.

$$D_1=\left(1+2a\right)^2-4\left(2-a\right)=4a^2+8a-7$$

$$D_2=\left(1-2a\right)^2-4\left(2-a\right)=4a^2-7.$$

Уравнение имеет единственное решение при $a=\frac{\sqrt{11}}{2}-1$ или $a=-\frac{\sqrt{7}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{2}-1,\ -\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Критерии.

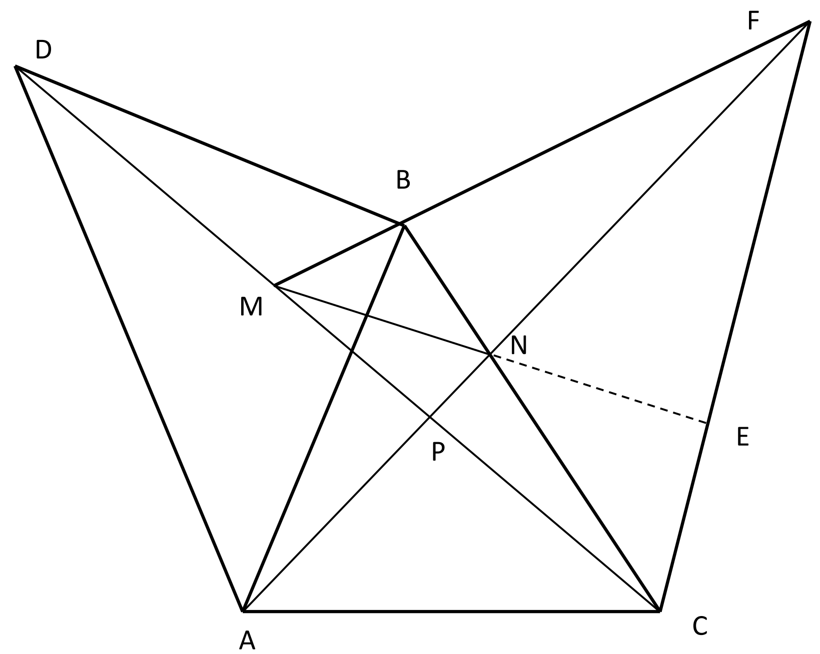
Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№5: (20 баллов). На боковых сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC, наружу построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABD и BCF с катетами равными соответствующим сторонам AB и BC треугольника ABC. Прямые FB и DC пересекаются в точке M, а FA и BC – в точке N. Найдите градусную меру $\angle BMN$.

Ответ: 45^0.

Решение.

Треугольники ABF и DBC равны по двум сторонам $AB=BD, CB=BF$ и углу между ними $\angle ABF=\angle CBD=\angle CBA+90^0$ => $\angle BAF=\angle BDC$ и $\angle BFA=\angle BCD$.



Сумма углов треугольника ABC: $\angle ABC + \angle BCP + \angle BAP + \angle PAC + \angle PCA = 180^0$, но т.к. $\angle BAP = \angle BAF = \angle BDC$, то $\angle ABC + \angle BCP + \angle BAP = \angle ABC + \angle BCP + \angle BDC$. По теореме о сумме углов треугольника BCD, $\angle ABC + \angle BCP + \angle BDC + \angle \mathrm{DBA} = \angle ABC + \angle BCP + \angle BDC + 90^0 = 180^0$ => $\angle ABC + \angle PAC + \angle PCA = 90^0$ => $\angle CPA = 90^0$ => $\angle CPF = 90^0$.

Рассмотрим треугольник MCF. В нем CB и FP – высоты, а N – их точка пересечения. Продолжим MN до пересечения с FC в точке E, следовательно, ME – его третья высота, т.е. $ME \perp CF$. Т.к. треугольник CBF – прямоугольный и равнобедренный, то $\angle BFC = \angle MFE = 45^0$, поэтому $\angle BMN = \angle FME = 90^0 - 45^0 = 45^0$.

Ответ: 45^0.

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
10	При верном и обоснованном ходе решения разобраны не все варианты или решение недостаточно обосновано.
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (обосновано и правильно расставлены точки M, N и K), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6: (20 баллов). В квадрате 6x6 расставили цифры так, что в верхней строке и левом столбце нет нулей. Всего получилось 12 шестизначных чисел: 6 из горизонтальных строк квадрата (слева-направо) и 6 из вертикальных столбцов квадрата (сверху-вниз). Коля, Вадим и Костя запомнили их, но оказалось, что каждый пропустил одно из 12 чисел. Коля заметил, что каждое из его одиннадцати чисел, делится на 11, Вадим обнаружил, что все его одиннадцать чисел делятся на 7, а Костя нашел у своих одиннадцати чисел общий делитель 13. Исходный квадрат они потеряли, а числа забыли, но им показалось, что где-то среди 12 чисел была комбинация цифр подряд 2021. Могло ли такое быть? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет.

Решение.

Докажем, что все 12 шестизначных числа делятся на 7, 11 и 13, т.е. на 1001. Следовательно, у каждого шестизначного числа ($abcabc$) цифры через две совпадают, а у 2021 – нет.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_6$ – горизонтальные числа в квадрате, а $y_1, y_2, \dots, y_6$ – вертикальные. Тогда $100000x_1 + 10000x_2 + 1000x_3 + 100x_4 + 10x_5 + x_6 100000y_1 + 10000y_2 + 1000y_3 + 100y + 10y_5 + y_6$, т.е. 11 из 12 слагаемых делятся на 7, 11 и 13, следовательно, и 12-е тоже.

Докажем это равенство: пусть

$x_1 = a_{11} \cdot 10^5 + a_{12} \cdot 10^4 + a_{13} \cdot 10^3 + a_{14} \cdot 10^2 + a_{15} \cdot 10^1 + \ a_{16} \cdot 10^0$,

$x_2 = a_{21} \cdot 10^5 + a_{22} \cdot 10^4 + a_{23} \cdot 10^3 + a_{24} \cdot 10^2 + a_{25} \cdot 10^1 + \ a_{26} \cdot 10^0$,

$x_3 = a_{31} \cdot 10^5 + a_{32} \cdot 10^4 + a_{33} \cdot 10^3 + a_{34} \cdot 10^2 + a_{35} \cdot 10^1 + \ a_{36} \cdot 10^0$,

$x_4 = a_{41} \cdot 10^5 + a_{42} \cdot 10^4 + a_{43} \cdot 10^3 + a_{44} \cdot 10^2 + a_{45} \cdot 10^1 + \ a_{46} \cdot 10^0$,

$x_5 = a_{51} \cdot 10^5 + a_{52} \cdot 10^4 + a_{53} \cdot 10^3 + a_{54} \cdot 10^2 + a_{55} \cdot 10^1 + \ a_{56} \cdot 10^0$,

$x_6 = a_{61} \cdot 10^5 + a_{62} \cdot 10^4 + a_{63} \cdot 10^3 + a_{64} \cdot 10^2 + a_{65} \cdot 10^1 + \ a_{66} \cdot 10^0$,

тогда

$100000x_1 + 10000x_2 + 1000x_3 + 100x_4 + 10x_5 + x_6 = a_{11} \cdot 10^{10} + a_{12} \cdot 10^9 + a_{13} \cdot 10^8 + a_{14} \cdot 10^7 + a_{15} \cdot 10^6 + \ a_{16} \cdot 10^5 + a_{21} \cdot 10^9 + a_{22} \cdot 10^8 + a_{23} \cdot 10^7 + a_{24} \cdot 10^6 + a_{25} \cdot 10^5 + \ a_{26} \cdot 10^4 + a_{31} \cdot 10^8 + a_{32} \cdot 10^7 + a_{33} \cdot 10^6 + a_{34} \cdot 10^5 + a_{35} \cdot 10^4 + \ a_{36} \cdot 10^3 + a_{41} \cdot 10^7 + a_{42} \cdot 10^6 + a_{43} \cdot 10^5 + a_{44} \cdot 10^4 + a_{45} \cdot 10^3 + \ a_{46} \cdot 10^2 + a_{51} \cdot 10^6 + a_{52} \cdot 10^5 + a_{53} \cdot 10^4 + a_{54} \cdot 10^3 + a_{55} \cdot 10^2 + \ a_{56} \cdot 10^1 + a_{61} \cdot 10^5 + a_{62} \cdot 10^4 + a_{63} \cdot 10^3 + a_{64} \cdot 10^2 + a_{65} \cdot 10^1 + \ a_{66} \cdot 10^0$.

Но ведь

$y_1 = a_{11} \cdot 10^5 + a_{21} \cdot 10^4 + a_{31} \cdot 10^3 + a_{41} \cdot 10^2 + a_{51} \cdot 10^1 + \ a_{61} \cdot 10^0$,

$y_2 = a_{12} \cdot 10^5 + a_{22} \cdot 10^4 + a_{32} \cdot 10^3 + a_{42} \cdot 10^2 + a_{52} \cdot 10^1 + \ a_{62} \cdot 10^0$,

$y_3 = a_{13} \cdot 10^5 + a_{23} \cdot 10^4 + a_{33} \cdot 10^3 + a_{43} \cdot 10^2 + a_{53} \cdot 10^1 + \ a_{63} \cdot 10^0$,

$y_4 = a_{14} \cdot 10^5 + a_{24} \cdot 10^4 + a_{34} \cdot 10^3 + a_{44} \cdot 10^2 + a_{54} \cdot 10^1 + \ a_{64} \cdot 10^0$,

$y_5 = a_{15} \cdot 10^5 + a_{25} \cdot 10^4 + a_{35} \cdot 10^3 + a_{45} \cdot 10^2 + a_{55} \cdot 10^1 + \ a_{65} \cdot 10^0$,

$y_6 = a_{16} \cdot 10^5 + a_{26} \cdot 10^4 + a_{36} \cdot 10^3 + a_{46} \cdot 10^2 + a_{56} \cdot 10^1 + \ a_{66} \cdot 10^0$,

тогда

$100000y_1 + 10000y_2 + 1000y_3 + 100y + 10y_5 + y_6 = a_{11} \cdot 10^{10} + a_{21} \cdot 10^9 + a_{31} \cdot 10^8 + a_{41} \cdot 10^7 + a_{51} \cdot 10^6 + \ a_{61} \cdot 10^5 + a_{12} \cdot 10^9 + a_{22} \cdot 10^8 + a_{32} \cdot 10^7 + a_{42} \cdot 10^6 + a_{52} \cdot 10^5 + \ a_{62} \cdot 10^4 + a_{13} \cdot 10^8 + a_{23} \cdot 10^7 + a_{33} \cdot 10^6 + a_{43} \cdot 10^5 + a_{53} \cdot 10^4 + \ a_{63} \cdot 10^3 + a_{14} \cdot 10^7 + a_{24} \cdot 10^6 + a_{34} \cdot 10^5 + a_{44} \cdot 10^4 + a_{54} \cdot 10^3 + \ a_{64} \cdot 10^3 + a_{15} \cdot 10^6 + a_{25} \cdot 10^5 + a_{35} \cdot 10^4 + a_{45} \cdot 10^3 + a_{55} \cdot 10^2 + \ a_{65} \cdot 10^1 + a_{16} \cdot 10^5 + a_{26} \cdot 10^4 + a_{36} \cdot 10^3 + a_{46} \cdot 10^2 + a_{56} \cdot 10^1 + \ a_{66} \cdot 10^0 = 100000x_1 + 10000x_2 + 1000x_3 + 100x_4 + 10x_5 + x_6$.

Ч.т.д.

Критерии.

Баллы	
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При верном и обоснованном ходе решения не обосновано, что 12-е число сохраняет свойства других 11-ти.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (7*11*13=1001 и abc*1001=abcabc), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.