Решение варианта №3 (Математика - 11 класс)

1. Дробь $\frac{1}{9}$ записана в виде бесконечной двоичной дроби (в двоичной системе счисления). Сколько единиц среди первых 2022 цифр после запятой содержится в такой форме записи? (12 баллов)

Решение. Наименьшим числом вида $2^n - 1$, делящимся на 9, будет число 64. Тогда

$$\frac{1}{9} = \frac{7}{63} = \frac{7}{64-1} = \frac{7}{2^6-1} = \frac{7}{64} \cdot \frac{1}{1-2^{-6}} = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right)(1 + 2^{-6} + 2^{-12} + 2^{-18} + \cdots) =$$

$(2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6})(1 + 2^{-6} + 2^{-128} + 2^{-18} + \cdots) = 0{,}000111000111000111 \ldots = 0,(000111)$ в двоичной системе счисления. Поскольку $2022 = 6 \cdot 337$, то среди первых 2022 цифр после запятой будет 1011 единиц.

Ответ: 1011.

2. Имеется куб, зафиксированный на ножках, и шесть различных красок. Сколькими способами можно покрасить все грани куба (каждую в один цвет, все краски использовать не обязательно) так, чтобы соседние грани (имеющие общее ребро) были разного цвета? (16 баллов)

Решение. Рассмотрим 4 варианта раскраски куба.

1) Верхняя и нижняя грани одного цвета, левая и правая грани одного цвета. Выбираем цвет верхней и нижней граней 6 способами, затем цвет левой и правой 5 способами, затем цвет передней 4 способами и цвет задней 4 способами. Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 480$ способов.

2) Верхняя и нижняя грани одного цвета, левая и правая грани разного цвета. Выбираем цвет верхней и нижней граней 6 способами, затем цвет левой 5 способами, потом цвет правой 4 способами, затем цвет передней 3 способами и цвет задней 3 способами.
Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 1080$ способов.

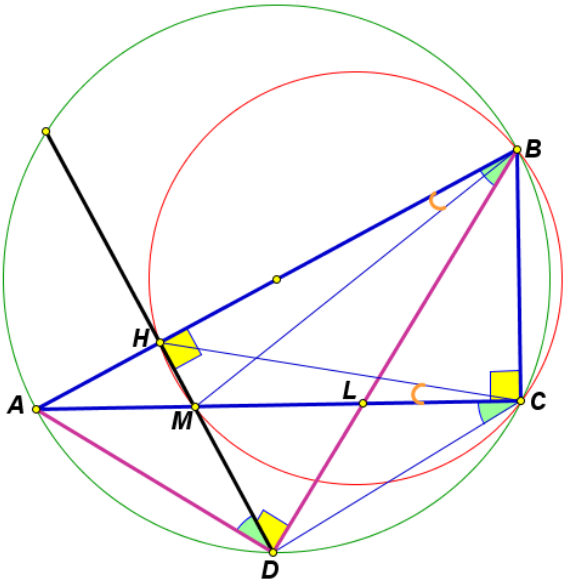
3) Верхняя и нижняя грани разного цвета, левая и правая грани одного цвета. Выбираем цвет левой и правой граней 6 способами, затем цвет верхней 5 способами, потом цвет нижней 4 способами, затем цвет передней 3 способами и цвет задней 3 способами.
Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 1080$ способов.

4) Верхняя и нижняя грани разного цвета, левая и правая грани разного цвета. Выбираем цвет верхней грани 6 способами, затем цвет нижней грани 5 способами, потом цвет левой грани 4 способами, затем цвет правой 3 способами, далее цвет передней грани 2 способами и задней 2 способами.
Итого, $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 1440$ способов.

Окончательно имеем $480 + 1080 + 1080 + 1440 = 4080$.

Ответ: 4080.

3. Точка M принадлежит катету AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, причем $AM = 2$, $MC = 16$. Отрезок MH – высота треугольника AMB. Точка D расположена на прямой MH так, что угол ADB равен 90°, и точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка BL, если L – точка пересечения BD и AC, а тангенс угла ACH равен $1/18$. (16 баллов)



Решение. 1. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность с диметром AB (углы ADB и ACB прямые). Тогда $\angle ABD = \angle ACD$,

$$\angle HAD = 90° - \angle ABD, \angle ADH = \angle ABD = \angle ACD.$$

Треугольники ACD и ADM подобны, и $\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD} = \frac{MD}{DC}$, $AD^2 = AC \cdot AM = 2 \cdot 18 = 36$, $AD = 6$.

2. Около четырехугольника $CBHM$ можно описать окружность с диметром MB (углы MHB и MCB прямые).

$$\angle MCH = \angle MBH = \alpha, \operatorname{tg}\alpha = 1/18.$$

Обозначим $BH = x, BC = y, MH = z$. Тогда $\frac{z}{x} = \frac{1}{18}$, $x = 18z$. Треугольники AMH и ABC подобны. Тогда $\frac{AM}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{MH}{BC}$, или $\frac{2}{\sqrt{y^2+324}} = \frac{\sqrt{y^2+324}-18z}{18} = \frac{z}{y}$, или

$$\begin{cases} 36 = y^2 + 324 - 18z\sqrt{y^2+324}, \\ 2y = z\sqrt{y^2+324}, \end{cases} \Rightarrow 36 = y^2 + 324 - 36y, y^2 - 36y + 288 = 0,$$

$y_1 = 12, y_2 = 24.$

1) $BC = y = 12, z = \frac{4}{\sqrt{13}}, AB = 6\sqrt{13}$, 2) $BC = y = 24, z = \frac{8}{5}, AB = 30$.

3. Треугольники ADL и BCL подобны, $\frac{AD}{BC} = \frac{AL}{BL} = \frac{LD}{LC}$, $\frac{AD}{BC} = \frac{AL}{BL} = \frac{LD}{LC}$. Пусть $u = BL, v = AL$.

Рассмотрим треугольник ABD. Имеем в **первом случае:** $AB = 6\sqrt{13}, AD = 6$, $BD = \sqrt{36 \cdot 13 - 36} = 12\sqrt{3}$. Тогда $\frac{6}{12} = \frac{v}{u} = \frac{12\sqrt{3}-u}{18-v}$, $u = 2v, 18 - v = 24\sqrt{3} - 4v, v = 8\sqrt{3} - 6$, $BL = 16\sqrt{3} - 12$.

Имеем во **втором случае:** $AB = 30, AD = 6, BD = \sqrt{900 - 36} = 12\sqrt{6}$. Тогда $\frac{6}{24} = \frac{v}{u} = \frac{12\sqrt{6}-u}{18-v}$, $u = 4v, 18 - v = 48\sqrt{6} - 16v, 15v = 48\sqrt{6} - 18$, $AL = \frac{16\sqrt{6}-6}{5}$, $BL = \frac{4(16\sqrt{6}-6)}{5}$.

Ответ: $16\sqrt{3} - 12$ или $\frac{4(16\sqrt{6}-6)}{5}$.

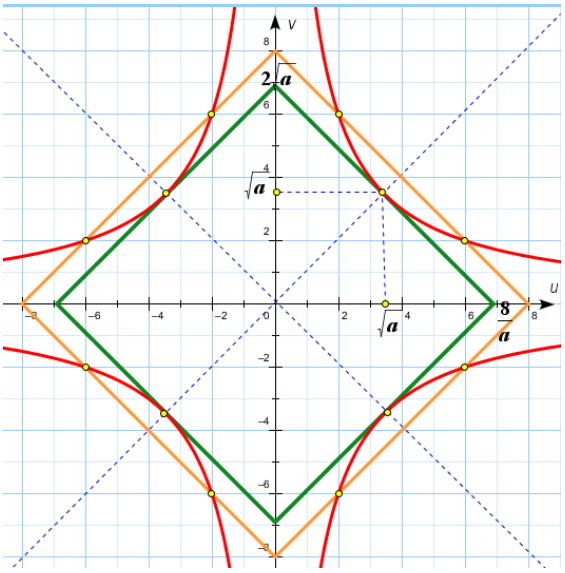
4. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (a|\operatorname{tg}^3 y| + a\,|\operatorname{ctg}^3 x\,| - 8)(\operatorname{ctg}^6 x + \operatorname{tg}^6 y - 3a^2) = 0, \\ \sqrt{(\operatorname{ctg}^6 x)(\operatorname{tg}^6 y)} = a \end{cases}$$

имеет не более двенадцати различных решений при $x \in (0;\, \pi)$ и $y \in (-\pi/2\,;\, \pi/2)$.

Решение. Сделаем замену переменных: $\operatorname{ctg}^3 x = u, \operatorname{tg}^3 y = v$. Переменные u и v могут принимать любые значения, x и y находятся однозначно. Отметим, что при $a = 0$ система имеет единственное решение. Пусть $a > 0$. Тогда получим

$$\begin{cases}(a|v|+a|u|-8)(u^2+v^2-3a^2)=0,\\ |uv|=a, a>0,\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|v|+|u|=8/a\,,\\ |uv|=a,\ \ a>0,\end{cases}\\ \begin{cases}u^2+v^2=3a^2,\\ |uv|=a,\ \ a>0.\end{cases}\end{array}\right.$$



I. $\begin{cases}|v|+|u|=8/a\,,\\ |uv|=a,\ \ a>0.\end{cases}$

1) Система имеет 4 различных решения, если

$$\frac{8}{a}=2\sqrt{a},\ \ a=2\sqrt[3]{2}.$$

2) Система имеет 8 различных решений, если

$$\frac{8}{a}>2\sqrt{a},\ \ 0<a<2\sqrt[3]{2}.$$

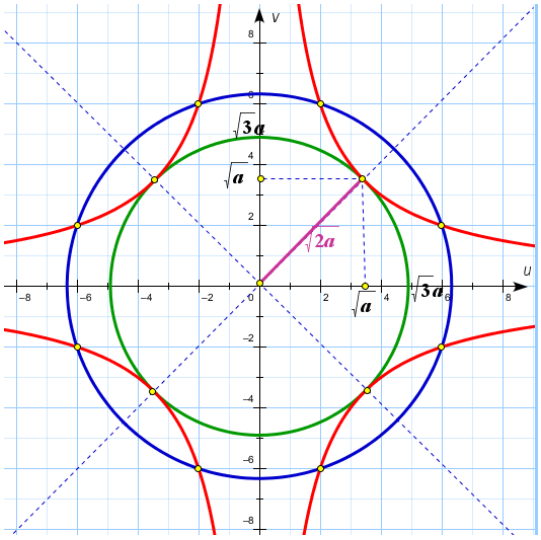
II. $\begin{cases}u^2+v^2=3a^2,\\ |uv|=a,\ \ a>0.\end{cases}$

1) Система имеет 4 различных решения, если

$$\sqrt{3}a=\sqrt{2a},\qquad a=2/3.$$

2) Система имеет 8 различных решений, если

$\sqrt{3}a>\sqrt{2a},\ \ a>2/3$.



Возможные **совпадения** решений в I и II случаях:

$$\begin{cases}|v|+|u|=8/a\,,\\ u^2+v^2=3a^2,\\ |uv|=a,\ \ a>0.\end{cases}$$

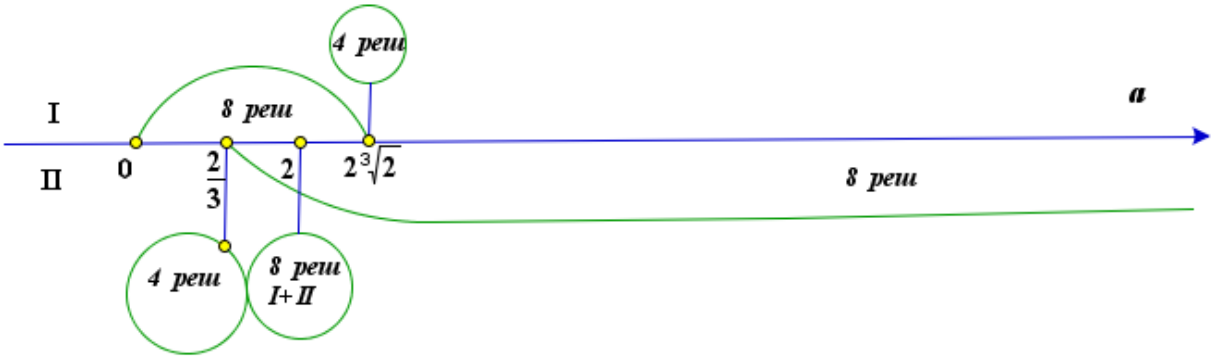
Из соображения симметрии можно рассмотреть только случай, когда $u>0, v>0$. Тогда

$$\begin{cases}v+u=8/a\,,\\ u^2+v^2=3a^2,\\ uv=a,\ \ a>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v+u=8/a\,,\\ (u+v)^2=3a^2+2a,\\ uv=a,\ \ a>0.\end{cases}$$

Имеем $64/a^2=3a^2+2a,\quad 3a^4+2a^3-64=0,$

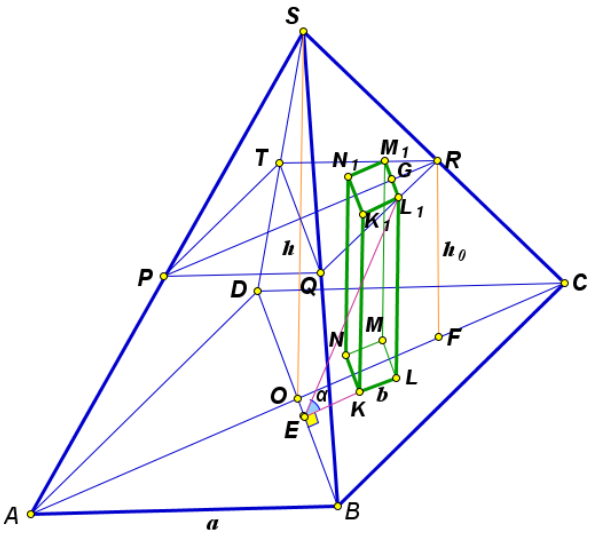
$a=2, 3a^4+2a^3-64=(a-2)(3a^3+8a^2+16a+32).$

Многочлен $3a^3+8a^2+16a+32$ положительных корней не имеет. При $a=2$ решения I и II случаев совпадают, и система будет иметь 8 решений.



Ответ: $a \in [0;\ 2/3] \cup \{2\} \cup [2\sqrt[3]{2};\ +\infty)$.

5. Внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ расположена правильная четырехугольная призма $KLMNK_1L_1M_1N_1$, основание $KLMN$ которой лежит в плоскости ABC. Центр основания $KLMN$ призмы расположен на отрезке AC, $KL \parallel AC$, $KN \parallel BD$ (точки K и B лежат по одну сторону от AC), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро KK_1 призмы равно 3. Вершины L_1 и M_1 верхнего основания призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ принадлежат боковым граням SBC и SCD пирамиды $SABCD$ соответственно. Плоскость γ проходит через прямую BD и точку L_1. Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду $SABCD$ плоскость γ, если сторона пирамиды равна $8\sqrt{2}$, а её высота равна 12. (20 баллов)



Решение. По условию имеем $AB = a = 8\sqrt{2}$, $SO = h = 12$, $KL = b = 2, KK_1 = h_0 = 3$.

$PR \parallel AC \parallel KL, RF \parallel SO, RF = h_0$.

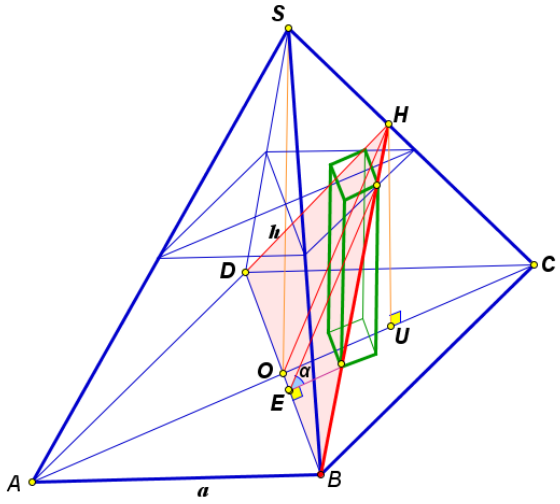
$\Delta RCF \sim \Delta SCO$, $\frac{CF}{CO} = \frac{RF}{SO} = \frac{h_0}{h} = \frac{1}{4}, CF = \frac{CO}{4}$.

Плоскость PQR параллельна ABC.

$GR \perp M_1L_1, GR = \frac{b}{2} = 1$. $KE \perp BD$,

$LE = CO - CF - GR = \frac{3CO}{4} - \frac{b}{2} = 6 - 1 = 5$.

Обозначим через α угол наклона плоскости γ к плоскости основания ABC. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_0}{LE} = \frac{3}{5}$.



Пусть точка H – точка пересечения плоскости γ и ребра SC. Тогда $\angle HOC = \alpha$. Если HU – перпендикуляр, опущенный на плоскость ABC, то $\frac{HU}{OU} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$.

$\Delta HCU \sim \Delta SCO$, $\frac{HU}{SO} = \frac{CU}{CO}, \frac{HU}{h} = \frac{CO-OU}{CO}$, $\frac{HU}{h} = \frac{CO-3HU}{CO}$, $\frac{HU}{12} = \frac{24-5HU}{24}, 7HU = 24, HU = \frac{24}{7}$.

Объем пирамиды $HBCD$: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{BD \cdot OC}{2} \cdot HU = \frac{512}{7}$.

Объем пирамиды $SABCD$: $V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{512}{3}$.

Объем второй части $V_2 = \frac{512}{3} - \frac{512}{7} = \frac{2048}{21}$.

Ответ: $\frac{512}{7}, \frac{2048}{21}$.

6. Современную жизнь невозможно представить без спутниковой связи и навигации. В 2021 году только тремя ведущими космическими державами произведено 126 успешных запусков спутников. По данным прикладного потребительского центра ГЛОНАСС в настоящее время в составе системы ГЛОНАСС задействовано 25 спутников, в системах GPS - 32, ГАЛИЛЕО – 26, БЕЙДОУ – 49 спутников. Возникает проблема безопасности их полетов.

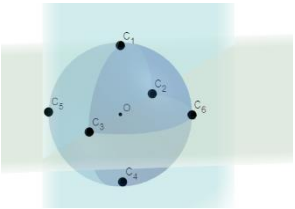
а) Считая Землю шаром радиуса R, определите, какое наибольшее количество спутников может одновременно находиться на орбитах вокруг Земли на одной и той же высоте H от ее поверхности так, чтобы расстояние между аппаратами было не меньше $\sqrt{2}(R+H)$.

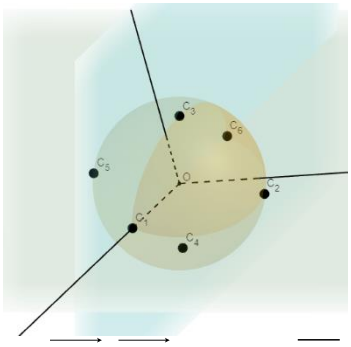
б) Для найденного максимального количества спутников указать координаты возможного их расположения в системе координат с началом в центре Земли и осью абсцисс, направленной вдоль вектора, соединяющего центр Земли с одним из спутников.

Решение. По условию в данный момент времени все спутники должны находится на сфере радиуса $R+H$. Обозначим O центр сферы, а ее радиус $R_H=R+H$. Спутники обозначим точками C_i, $i=1,\ldots,n$. Надо определить максимальное значение n.

а) Найдем расстояние C_iC_j, используя теорему косинусов для треугольника OC_iC_j.

$$C_iC_j^2 = OC_i^2 + OC_j^2 - 2OC_i \cdot OC_j \cdot \cos(\angle OC_i, OC_j) = 2R_H^2 - 2R_H^2 \cdot \cos\alpha = 2R_H^2(1-\cos\alpha) \geq 2R_H^2,$$





Значит, $1-\cos\alpha \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha \leq 0$. Покажем, что шесть спутников, удовлетворяющих такому условию, расположить на орбитах можно. Они могут располагаться на трех взаимно перпендикулярных диаметрах сферы. Предположим, что спутников может быть больше 6. Поскольку по предположению спутников больше 6, следовательно, можно выбрать 3 спутника, не лежащих в одной плоскости с точкой O, и рассмотреть систему координат с центром в точке O. Ось абсцисс направим вдоль прямой OC_1, за единицу примем расстояние OC_1. Ортогональную ось ординат направим так, чтобы точка C_2 имела координаты $(x_2, y_2, 0)$, и ордината была положительна $y_2 > 0$, а третью ось направим в сторону, ближайшую к $C_3(x_3, y_3, z_3)$, чтобы аппликата была положительна $z_3 > 0$. Рассмотрим скалярные произведения векторов, учитывая, что все они неположительные.

$$\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OC_i} = x_i, \quad i = \overline{2,n}, \quad \overrightarrow{OC_2} \cdot \overrightarrow{OC_i} = x_2x_i + y_2y_i, \; i = \overline{3,n}, \quad \overrightarrow{OC_3} \cdot \overrightarrow{OC_i} = x_3x_i + y_3y_i + z_3z_i, \; i = \overline{4,n}.$$

Т.к. $\cos(\angle OC_i, OC_j) \leq 0$, следовательно, $x_i \leq 0, \; i = \overline{2,n}$, значит, все $y_i \leq 0, \; i = \overline{3,n}$, $x_3x_i + y_3y_i + z_3z_i \leq 0, \; i = \overline{4,n}$. Значит, что и все $z_i \leq 0, \; i = \overline{4,n}$. Таким образом, у всех векторов, начиная с $\overrightarrow{OC_4}$, все координаты неположительные. А следовательно, все попарные скалярные произведения векторов $\overrightarrow{OC_4}, \overrightarrow{OC_5}, \overrightarrow{OC_6}, \overrightarrow{OC_7}$ будут неотрицательными. Поскольку в пространстве может быть не более 3 взаимно ортогональных векторов, хотя бы одно из этих скалярных произведений строго положительно. Получили противоречие. Следовательно, предположение о наличии более 6 спутников, удовлетворяющих требуемым условиям, неверно. Ответ: 6 спутников.

б) Размещение 6 спутников возможно, например, в точках с координатами (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1). Или, если отойти от условных единиц, то (R_H,0,0), (0, R_H,0), (0,0, R_H), (-R_H,0,0), (0,-R_H,0), (0,0,-R_H)