Решение варианта №1 (Математика - 11 класс)

1. Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите $u^9 + v^9 + w^9$. (12 баллов)

Решение. Согласно теореме Виета, $u + v + w = 0$, $uv + vw + vw = -3, uvw = 1$. Рассмотрим последовательность $S_n = u^n + v^n + w^n$. Имеем $S_0 = 3$, $S_1 = 0$. Найдем S_2: $S_2 = u^2 + v^2 + w^2 = (u + v + w)^2 - 2(uv + vw + vw) = 6$. Поскольку $u^3 = 3u + 1, v^3 = 3v + 1$, $w^3 = 3w + 1$, то $S_3 = u^3 + v^3 + w^3 = 3S_1 + S_0$. Далее $u^n = 3u^{n-2} + u^{n-3}, v^n = 3v^{n-2} + v^{n-3}$, $w^n = 3w^{n-2} + w^{n-3}$, то $S_n = 3S_{n-2} + S_{n-3}$. Находим $S_3 = 3, S_4 = 18$, $S_5 = 15, S_6 = 57, S_7 = 63, S_9 = 246$.

Ответ: 246

2. В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/2$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее трех. Лаборант поочередно случайно выбирает три колбы, и первую из них полностью заполняет 80-процентным раствором соли, вторую полностью заполняет 50-процентным раствором соли, а третью колбу полностью заполняет 20-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих трех колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 45% до 55% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать. (16 баллов)

Решение. Если N — имеющееся количество больших колб в лаборатории, $N = 3, 4, \ldots, 97$, то $n = 100 - N$ — имеющееся количество малых колб в лаборатории, $n = 3, 4, \ldots, 97$. Для события A = {содержание соли в чаше находится в пределах от 45% до 55% включительно} необходимо найти такое наименьшее N, что вероятность $\mathrm{P}(A) < 1/2$.

Мысленно перенумеруем все имеющиеся в лаборатории колбы — присвоим им личные номера от 1 до 100. И тогда равновероятными исходами этого эксперимента будут упорядоченные тройки различных личных номеров последовательно выбираемых лаборантом колб: $\omega = (i_1, i_2, i_3)$, $i_j \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, $i_j \neq i_k$, $j, k = 1, 2, 3$. Общее количество таких исходов равно $100 \cdot 99 \cdot 98$.

Вычислим теперь количество благоприятных исходов для появления события A. Рассмотрим следующие случаи, определяемые размерными типами выбранных колб.

1) Лаборант выбирает три большие колбы - тип [Б, Б, Б]. Тогда процентное содержание соли в чаше в результате описанных манипуляций лаборанта окажется равным величине: $\frac{(0{,}8V+0{,}5V+0{,}2V)100}{3V} = 50\% \in [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор **благоприятствует** появлению события A. Количество элементарных исходов данного типа, очевидно, равно $N \cdot (N-1) \cdot (N-2)$.
2) Лаборант выбирает три маленькие колбы - тип [м, м, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V/2+0{,}5V/2+0{,}2V/2)100}{3V/2} = 50\% \in [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор **благоприятствует** появлению события A. Количество исходов в этом случае равно $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$.
3) Лаборант выбирает сначала две большие колбы, затем маленькую - тип [Б, Б, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V+0{,}5V+0{,}2V/2)100}{5V/2} = 56\% \notin [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор не благоприятствует появлению события A.

4) Лаборант выбирает последовательно большую, малую и большую колбы -тип [Б, м, Б]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V+0{,}5V/2+0{,}2V)100}{5V/2} = 50\% \in [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор **благоприятствует** появлению события A. Количество элементарных исходов в этом случае равно $N \cdot n \cdot (N-1)$.
5) Лаборант выбирает сначала малую колбу, затем две большие колбы - тип [м, Б, Б]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V/2+0{,}5V+0{,}2V)100}{5V/2} = 44\% \notin [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор не благоприятствует появлению события A.
6) Лаборант выбирает сначала две малые колбы, затем большую колбу - тип [м, м, Б]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V/2+0{,}5V/2+0{,}2V)100}{2V} = 42{,}5\% \notin [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор не благоприятствует появлению события A.
7) Лаборант выбирает последовательно малую, большую и малую колбы - тип [м, Б, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V/2+0{,}5V+0{,}2V/2)100}{2V} = 50\% \in [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор **благоприятствует** появлению события A. Количество элементарных исходов в этом случае равно $n \cdot N \cdot (n-1)$.
8) Лаборант выбирает сначала большую, затем две малые колбы - тип [Б, м, м]. Процентное содержание соли в чаше: $\frac{(0{,}8V+0{,}5V/2+0{,}2V/2)100}{2V} = 57{,}5\% \notin [45\%;\ 55\%]$. Такой выбор не благоприятствует появлению события A.

Вычисляем вероятность события A (по формуле классической вероятности):

$$P(A) = \frac{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)+N\cdot n\cdot(N-1)+n\cdot N\cdot(n-1)}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{N^3+n^3-3N^2-3n^2+2(N+n)+98Nn}{100\cdot 99\cdot 98} =$$
$$\frac{100(N^2-Nn+n^2)-3N^2-3n^2+200+98Nn}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{97(N^2+n^2)+200-2Nn}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{97(N+n)^2+200-196Nn}{100\cdot 99\cdot 98} =$$
$$\frac{970200-196N(100-N)}{100\cdot 99\cdot 98} = \frac{N^2-100N+4950}{4950} = \frac{(N-50)^2+2450}{4950}.$$

Отсюда имеем $P(A) = \frac{(N-50)^2+2450}{4950} < \frac{1}{2} \iff 45 < N < 55$. И значит, $N_{\min} = 46$.

Ответ: при $N = 46$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB – биссектриса угла ADC, $AD:DC = 4:3$. Найдите косинус угла AKB, если K – точка пересечения диагоналей AC и BD, и $BK:KD = 1:3$. (16 баллов)

Решение.

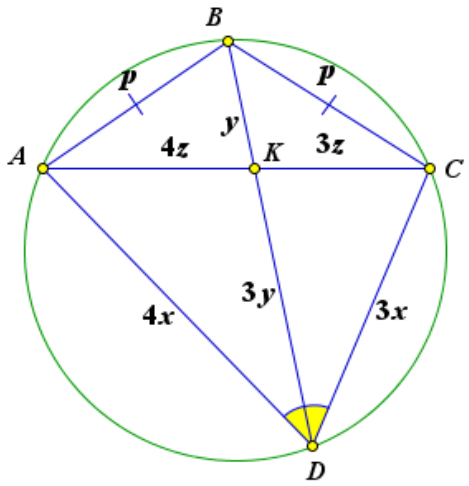
1) $AD:DC = 4:3$, пусть $AD = 4x, DC = 3x$,

$BK:KD = 1:3$, пусть $BK = y, KD = 3y$.

2) DK – биссектриса треугольника ADC,

$AK:KC = AD:DC = 4:3$, $AK = 4z, KC = 3z$.

3) Точка B является точкой пересечения серединного перпендикуляра к диагонали AC и биссектрисы угла D в выпуклом четырехугольнике $ABCD$. Следовательно, около этого четырехугольника можно описать окружность.



Действительно, опишем окружность около треугольника ACD, обозначим точку пересечения биссектрисы угла D с окружностью через B_1. Тогда по свойству вписанных углов дуги AB_1 и B_1C будут равны, хорды AB_1 и B_1C тоже будут равны, треугольник AB_1C будет равнобедренным, и серединный перпендикуляр к диагонали AC и биссектриса угла D будут пересекаться в точке B_1. Следовательно, $B_1 = B$.

4) Поскольку около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, то для его диагоналей верно равенство $AK \cdot KC = BK \cdot KD$, $4z^2 = y^2, y = 2z$.

5) Треугольник ABK подобен DCK, и $\frac{AB}{CD} = \frac{BK}{KC}$, пусть $AB = p$, $\frac{p}{3x} = \frac{y}{3z} = \frac{2}{3}$, $p = 2x$, $x = \frac{p}{2}$.

6) $AD = 2p, DC = \frac{3p}{2}$.

7) По теореме косинусов для треугольников ABC и ADC с учетом $\angle B + \angle D = 180°$ имеем $49z^2 = 2p^2 - 2p^2\cos\angle B, 49z^2 = 4p^2 + \frac{9p^2}{4} + 6p^2\cos\angle B$. Отсюда $z = \frac{p}{4}, y = \frac{p}{2}, AK = p, BK = \frac{p}{2}$.

9) Для равнобедренного треугольника ABK имеем $\cos\angle AKB = \frac{BK}{2AK} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $1/4$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(4y - 3|x - a| - x + 5a) = 0, \\ (\log_a x^2 + \log_a y^2 - 2)\log_2 a^2 = 8 \end{cases}$$

имеет шесть различных решений. (16 баллов)

Решение. Упростим второе уравнение системы: $(\log_a x^2 + \log_a y^2 - 2)\log_2 a^2 = 8 \Leftrightarrow a > 0,\ a \neq 1,\ \log_a x^2y^2 = 2 + 4\log_a 2,\ |xy| = 4a$. Имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ay - ax + 2 = 0, \\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 4y - 3|x - a| - x + 5a = 0, \\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x - 2/a\,, \\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3|x - a|/4 + x/4 - 5a/4\,, \\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

I. $\begin{cases} y = x - 2/a\,, \\ |xy| = 4a,\ \ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$

1) Система имеет 2 различных решения, если

$$\frac{2}{a} < 4\sqrt{a},\ \ a > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, a \neq 1.$$

Найдем эти решения:

$x - \frac{2}{a} = \frac{4a}{x}, x^2 - \frac{2}{a}x - 4a = 0,$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a}, y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a^3}}{a}.$

2) Система имеет 3 различных решения, если

$$\frac{2}{a} = 4\sqrt{a}, \quad a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a^3}}{a}$, $y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a^3}}{a}$,

$$x_3 = 2\sqrt{a}, y_3 = -2\sqrt{a}.$$

3) Система имеет 4 различных решения, если

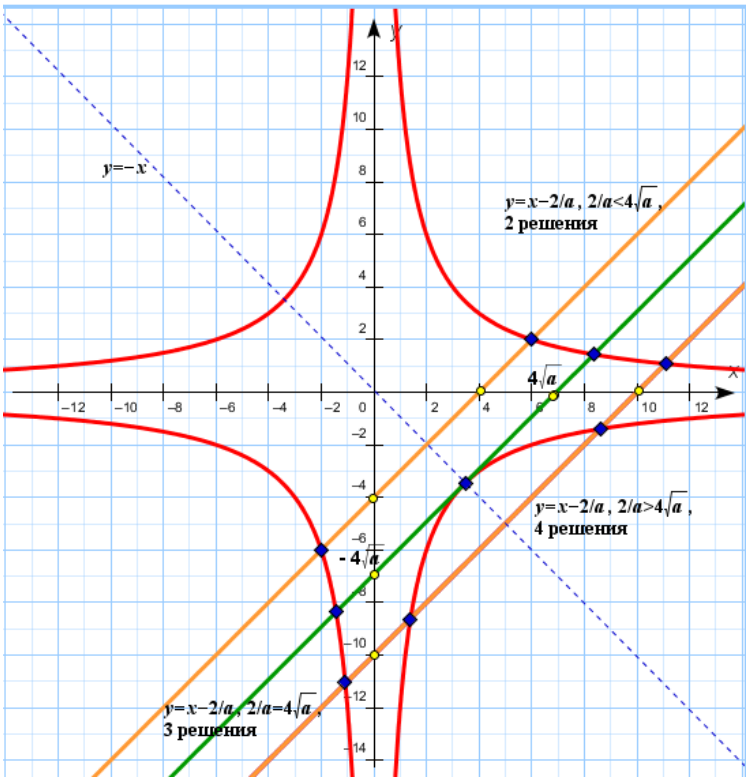
$$\frac{2}{a} > 4\sqrt{a}, \quad 0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Найдем эти решения:

$x - \frac{2}{a} = \frac{4a}{x}, x^2 - \frac{2}{a}x - 4a = 0,\ x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a^3}}{a}$, $y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a^3}}{a}$.

$x - \frac{2}{a} = -\frac{4a}{x}, x^2 - \frac{2}{a}x + 4a = 0,$

$x_{3/4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^3}}{a}$, $y_{3/4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a^3}}{a}$.



II. $\begin{cases} y = 3|x-a|/4 + x/4 - 5a/4, \\ |xy| = 4a, \quad a > 0, a \neq 1. \end{cases}$

$y = 3|x-a|/4 + x/4 - 5a/4$,

при $x \geq a$ имеем $y = x - 2a$, при $x \leq a$ имеем $y = -\frac{x+a}{2}$.

1) Система имеет 2 различных решения, если

$$2a < 4\sqrt{a}, \quad a < 4, a \neq 1.$$

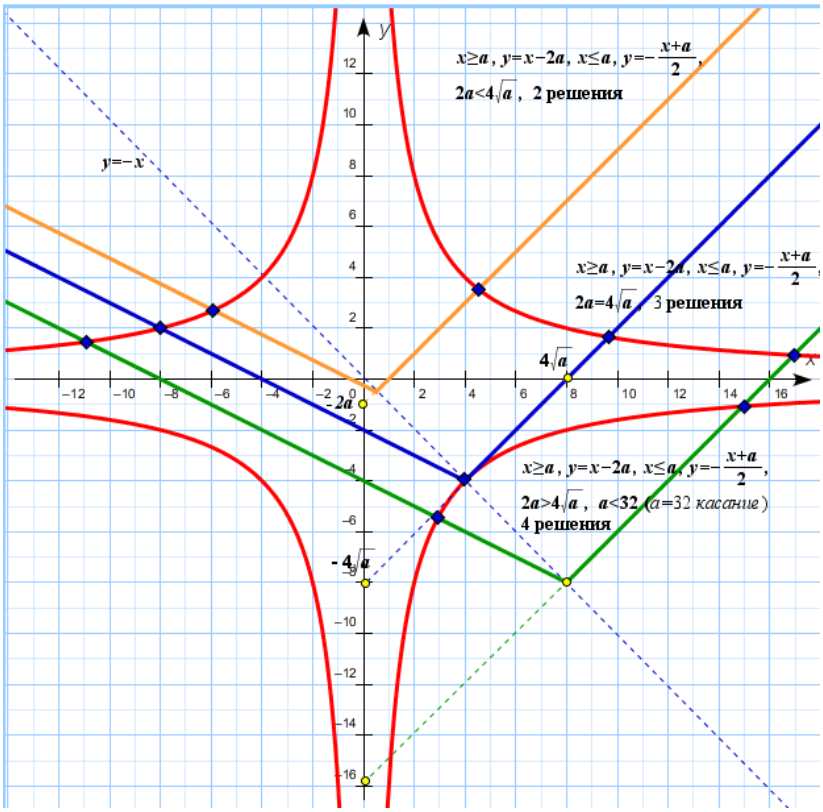
Найдем эти решения:

$x - 2a = \frac{4a}{x}, x^2 - 2ax - 4a = 0,$

правый корень $x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$,

$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}$;

$-\frac{x+a}{2} = -\frac{4a}{x}, x^2 + ax - 8a = 0$, левый корень $x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+32a}}{4}$.



2) Система имеет 3 различных решения, если

$$2a = 4\sqrt{a},\ \ a = 4.$$

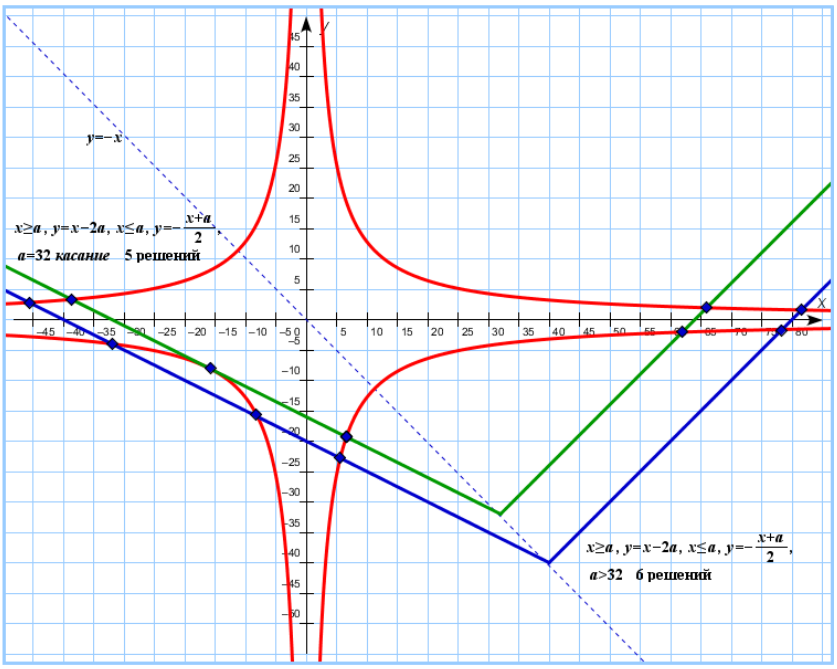
Найдем эти решения:

$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$,

$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}$;

$x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+32a}}{4}$.

$$x_3 = 2\sqrt{a}, y_3 = -2\sqrt{a}.$$



3) Найдем значение параметра $a > 0$, при котором прямая $y = -\frac{x+a}{2}$ будет касаться графика гиперболы $y = \frac{4a}{x}$.

$-\frac{x+a}{2} = \frac{4a}{x}, x^2 + ax + 8a = 0,$

$D = a(a - 32) = 0, a = 32$. Тогда при $4 < a < 32$ система будет иметь 4 решения: $x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$,

$y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}$;

$x_{2/3} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_{2/3} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2+32a}}{4}$. Найдем четвертое решение:

$x - 2a = -\frac{4a}{x}, x^2 - 2ax + 4a = 0$, правый корень $x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}$, $y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a}$.

4) При $a = 32$ система будет иметь 5 различных решений:

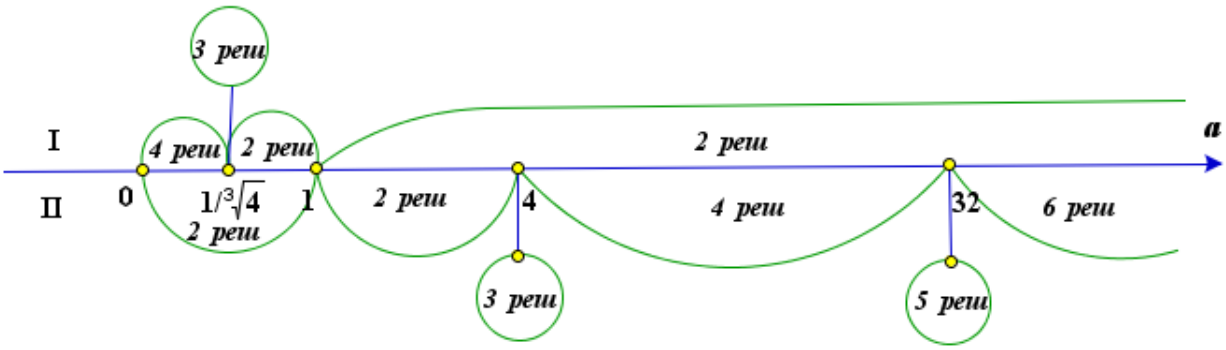
$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$, $y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}$; $x_{2/3} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_{2/3} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2+32a}}{4}$,

$x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}$, $y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a}$, $x_5 = -a/2$, $y_5 = -a/4$.

5) Система имеет 6 различных решений при $a > 32$:

$x_1 = a + \sqrt{a^2 + 4a}$, $y_1 = -a + \sqrt{a^2 + 4a}$; $x_{2/3} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2+32a}}{2}$, $y_{2/3} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2+32a}}{4}$,

$x_4 = a + \sqrt{a^2 - 4a}$, $y_4 = -a + \sqrt{a^2 - 4a}$, $x_{5/6} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-32a}}{2}$, $y_{5/6} = \frac{-a\mp\sqrt{a^2-32a}}{4}$.



Возможны следующие случаи совпадения решений в I и II случаях:

1) $x - \frac{2}{a} = x - 2a, a = 1$, в этом случае нет решений;

2) прямые $y = x - \frac{2}{a}$, $y = -\frac{x+a}{2}$ и гипербола $y = \frac{4a}{x}$ пересекаются в одной точке, но этот случай возможен при $a > 32$, и в этом случае будет 7 решений.

Ответ: $a \in (0;\ 1/\sqrt[3]{4}) \cup (4; 32)$,

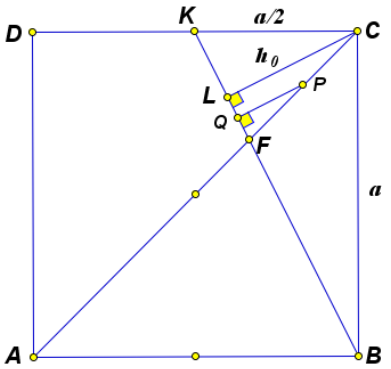
5. Шар радиуса $\frac{4}{9}$ лежит внутри правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ со стороной основания 8 и высотой 3. Этот шар касается плоскости основания $ABCD$ пирамиды и боковых граней SBC и SCD. Плоскость γ касается шара, проходит через точку B, середину K ребра CD и пересекает ребро SC в точке M. Найдите объем пирамиды $MBCK$. (20 баллов)

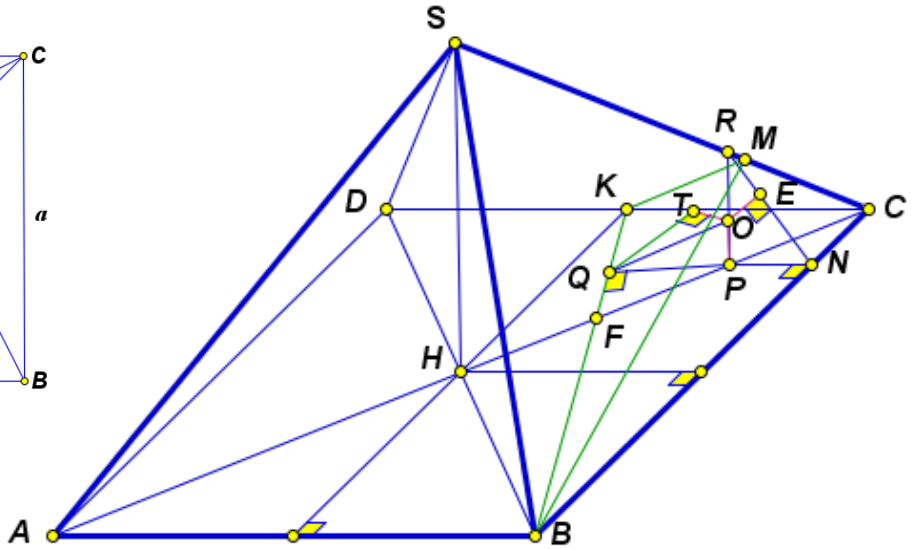
Решение. Поскольку пирамида $SABCD$ правильная, то центр O указанного шара лежит в плоскости SHC, где SH – высота пирамиды. Пусть $RP \parallel SH, R \in SC, P \in HC, O \in RP$. Обозначим $SH = h, AB = a,\ RP = kh$. Проведем $PN \parallel AB, N \in BC$. E – точка касания шара плоскости SBC, пусть радиус шара $OE = r$. Поскольку $PC{:}HC = k$, то $PN = ka/2$. Треугольники ROE и RPN подобны, и $OE{:}PN = RO{:}RN$, или

$$\frac{r}{ka/2} = \frac{kh - r}{k\sqrt{h^2 + (a/2)^2}}, \qquad \frac{r}{a} = \frac{kh - r}{\sqrt{4h^2 + a^2}}, \qquad k = \frac{r}{h}\left(\frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{a} + 1\right).$$

По условию задачи $a = 8, h = 3, r = 4/9$. Тогда $k = 1/3$.

Точка F – точка пересечения AC и BK, тогда $FC = AC/3$. Поскольку $PC = kHC = HC/3 = AC/6, FP = PC$.

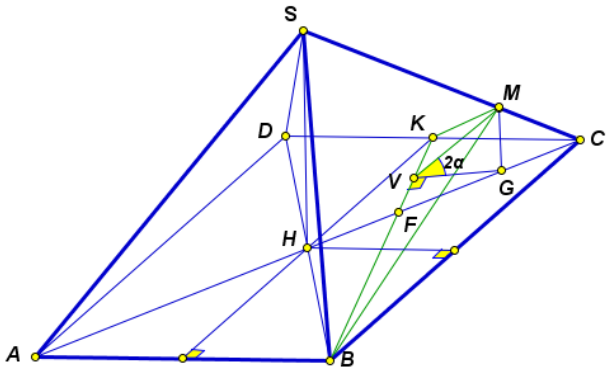




Пусть $PQ \perp BK$.
Тогда $PQ = \frac{a}{2\sqrt{5}}$.

Если $\alpha = \angle OQP$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r2\sqrt{5}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{9}$. Угол между плоскостью γ и плоскостью основания равен 2α. Тогда $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4\sqrt{5}ar}{a^2-20r^2} = \frac{9\sqrt{5}}{38}$.

Пусть MG – отрезок перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость основания ABC, и $MG = nh$. Тогда $CG = nCH$. Если $GV \perp BK$, то $GV = \frac{GF}{CF}h_0 = \frac{AC/3 - nAC/2}{AC/3}h_0 = \frac{2-3n}{2}h_0$, $h_0 = \frac{a}{\sqrt{5}}$ – высота треугольника BCK, проведенная из вершины C.



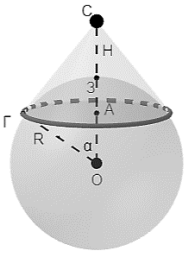
$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2nh\sqrt{5}}{(2-3n)a}, n = \frac{4ra^2}{(h+6r)a^2 - 20hr^2} = \frac{12}{37}.$$

$$V_{MBCK} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}nh = \frac{192}{37}.$$

Ответ: $\mathbf{\frac{192}{37}}$

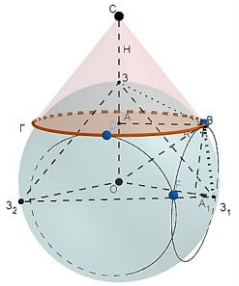
6. В 2022 году исполняется 65 лет запуска первого искусственного спутника Земли (ИСЗ). В настоящее время для обеспечения бесперебойной работы сотовой связи, систем теле и радиовещания используются различные виды спутников, находящихся на различных орбитах, на различных высотах.

Зоной покрытия спутника назовем часть поверхности земного шара, в пределах которой обеспечивается уровень сигналов к спутнику и от него, необходимый для их приема с заданным качеством в конкретный момент времени. Как правило, эта часть поверхности ограничивается окружностью, проходящей по линии видимого горизонта. На рисунке - линия проходит через точку Г.



а) Определите площадь земной поверхности (в *км*^{2}), которая является зоной покрытия спутника, находящегося на высоте $H = 500$ *км* относительно земной поверхности, считая ее сферой радиуса $R = 6400$ *км* с центром в точке О.

б) Найдите все значения $n > 1$, для которых на поверхности земли можно расположить окружности C_1, ..., C_n, каждая из которых внешним образом касается окружности C_0, с центром в точке А и радиусом $r < R$, каждая из них является границей зоны покрытия ИСЗ, находящегося на той же высоте Н, что и спутник с зоной покрытия C_0. Каждая из зон покрытия C_i должна внешним образом касаться окружностей C_0 и C_{i+1}, $i = 0,1,\ldots,n-1$, т.е. первая касается C_0 и C_2, вторая - C_0 и C_3, и т.д. Окружность C_n должна касаться C_0 и C_1. (20 баллов)



Решение. а) Зона покрытия – часть сферы, лежащая внутри конуса.

$S = 2\pi R\cdot h$, где h =АЗ - высота сегмента. $h = R - R\cos\alpha$, здесь угол α - угол между радиусом ОГ и линией ОА, соединяющий центр сферы с центром окружности, которая является линией пересечения сферы и конуса.

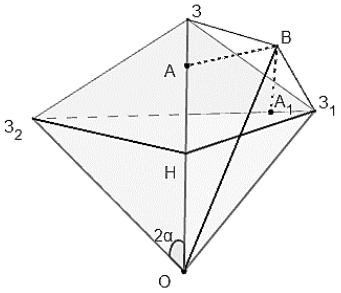
Тогда площадь равна

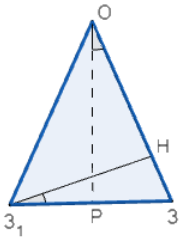
$$S = 2\pi R^2(1-\cos\alpha) = 2\pi R^2(1-\frac{R}{R+H}) = 2\pi R^2\cdot\frac{H}{R+H} \approx$$

$$\approx 6\cdot 6400^2\cdot\frac{500}{6900} = 6400^2\cdot\frac{10}{23} \approx \frac{4096}{23}\cdot 10^5 \approx 178{,}09\cdot 10^5 = 17809000 \text{ км}^2.$$

б) Пусть О – центр сферы, В – точка касания первой и второй окружности, А и A_1 их центры этих окружностей, З, $З_1$, $З_2$ – точки пересечения радиусов R со сферой. Обозначим α - угол

между ОЗ и ОВ. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{r}{R}$, $ЗЗ_1=2r$. В правильной пирамиде $ОЗЗ_1З_2$ плоские углы при вершине равны 2α, двугранный угол при ребре ОЗ равен $360/n$. Опустив перпендикуляры из точек $З_1$ и $З_2$ на ребро ОЗ в точку Н, треугольники $ОЗЗ_1$ и $ОЗЗ_2$ равны (по трем сторонам), т.к. две стороны равны R, а третья 2r.





$$HЗ_1 = HЗ_2 = 2r\cos\alpha = 2r\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 2r\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ 2r = ЗЗ_1 = З_1З_2 = 2\cdot З_1H\cdot\sin(180/n) = 4r\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\sin(180/n)$$. Следовательно,

$$2\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\sin(180/n) = 1 \quad\Rightarrow\quad \sin(180/n) = 1/\left(2\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right) > 1/2 \ \Rightarrow n < 6.$$

Ответ: а) 17809000,
б) 2, 3, 4, 5.