Решение варианта № 1 (11 класс, отборочный этап)

1. Производство керамических изделий состоит из 3 последовательных этапов: формование керамического изделия на гончарном круге в течение 15 минут, сушка в течение 10 минут, и обжиг в течение 30 минут. Требуется изготовить 75 изделий. Как распределить 13 мастеров на формовщиков и обжигальщиков для работы на 1 и 3 этапах соответственно в течение всего отведенного на этап времени (для сушки изделий рабочие не требуются), чтобы выполнить работу за кратчайшее время? В ответ запишите кратчайшее время (в минутах), необходимое для выполнения всей работы. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

Решение. Формовщиков – 4, декораторов – 8. Тринадцатый мастер может работать на любом этапе, может вообще не участвовать в работе. В этом случае время работы – 325 минут $\left(55+\left(\left[\frac{75}{4}\right]+1\right)\cdot 15=325\right)$. Покажем, что при других расстановках время работы больше. Предположим, что формовщиков меньше 4 (3, 2 или 1), то время на формовку не меньше 375 минут. Если же декораторов меньше 8, то время на выполнение 3 этап не менее 330 минут. **Ответ: 325**

2. Решите уравнение $\frac{15}{x(\sqrt[3]{35-8x^3})}=2x+\sqrt[3]{35-8x^3}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений. (5 баллов)

Решение.

$u=\sqrt[3]{35-8x^3},\ 8x^3=35-u^3,$

$$\begin{cases}\frac{15}{xu}=2x+u,\\ 8x^3+u^3=35,\end{cases} t=2xu, v=2x+u \Rightarrow \begin{cases}\frac{30}{t}=v,\\ v(v^2-3t)=35,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=6,\\ v=5,\end{cases}$$

$$\begin{cases}xu=3,\\ 2x+u=5,\end{cases} \Rightarrow 2x^2-5x+3=0 \Rightarrow x_1+x_2=2{,}5.$$

Ответ: 2,5

3. Найдите все натуральные значения n, при которых

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cdots+\cos\frac{2\pi n}{9}=\cos\frac{\pi}{9}, \text{ и } \log_2^2 n+45<\log_2 8n^{13}.$$

В ответ запишите сумму полученных значений n. (6 баллов)

Решение.

$cos\frac{2\pi}{9}+cos\frac{4\pi}{9}+\cdots+cos\frac{2\pi n}{9}=cos\frac{\pi}{9} \quad \Leftrightarrow 2\,sin\frac{\pi}{9}cos\frac{2\pi}{9}+2\,sin\frac{\pi}{9}cos\frac{4\pi}{9}+\cdots+$ $2\,sin\frac{\pi}{9}cos\frac{2\pi n}{9}=2\,sin\frac{\pi}{9}cos\frac{\pi}{9}\Leftrightarrow$

$$sin\frac{3\pi}{9}-sin\frac{\pi}{9}+sin\frac{5\pi}{9}-sin\frac{3\pi}{9}+\cdots+sin\frac{\pi}{9}(1+2n)-sin\frac{\pi}{9}(2n-1)=sin\frac{2\pi}{9}\Leftrightarrow$$

$sin\frac{\pi}{9}(1+2n)-sin\frac{\pi}{9}=sin\frac{2\pi}{9}\Leftrightarrow sin\frac{\pi}{9}(1+2n)=sin\frac{2\pi}{9}+sin\frac{\pi}{9}\Leftrightarrow sin\frac{\pi}{9}(1+2n)=$ $2\,sin\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{18}\Leftrightarrow sin\frac{\pi}{9}(1+2n)=sin\frac{4\pi}{9}\Leftrightarrow 2\,sin(\frac{\pi n}{9}-\frac{\pi}{6})\,cos(\frac{\pi n}{9}+\frac{5\pi}{18})=0\Leftrightarrow\frac{\pi n}{9}-\frac{\pi}{6}=$ $\pi k,\ k\in Z,\quad \frac{\pi n}{9}+\frac{5\pi}{18}=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z,\Leftrightarrow 2n=3(6k+1),\ k\in Z,\quad n=2+$

$9m,\ m \in Z$. Поскольку n - натуральное число, то первое соотношение не имеет место (четное число не может быть равно нечетному). Итак, $n = 2 + 9m,\ m \in Z,\ m \geq 0$.

Решим неравенство $log_2^2\, n + 45 < log_2\, 8\, n^{13} \Leftrightarrow log_2^2\, n - 13\, log_2\, n + 42 < 0, \Leftrightarrow (log_2\, n - 6)(log_2\, n - 7) < 0, \Leftrightarrow 2^6 < n < 2^7, \Leftrightarrow 64 < 2 + 9m < 128,\ m \in Z,\ m \geq 0 \Leftrightarrow 6\frac{8}{9} < m < 14,\ m \in Z,\ m \geq 0 \Leftrightarrow m = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13$. $S_7 = \frac{65+119}{2} \cdot 7$=644.

Ответ: 644

4. Сколькими способами можно распилить ствол бамбука (неоднородный природный материал) длиной 4 м на три части, длины которых кратны 1 дм, и из которых можно составить треугольник? (12 баллов)

Решение.

. Пусть A_n — точка ствола на расстоянии n дм от основания. Будем пилить в точках A_p и A_q, $p < q$. Для соблюдения неравенства треугольника необходимо и достаточно, чтобы каждая часть получилась не длиннее 19 дм:

$$p \leq 19, \qquad 21 \leq q \leq p + 19.$$

Таким образом, число способов выбрать p и q будет

$$\sum_{p=1}^{19}(p + 19 - 20) = 0 + 1 + 2 + \ldots + 18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171.$$

Ответ: 171

5. Сколько решений в натуральных числах $x,\ y$ имеет неравенство $x/76 + y/71 < 1$? (12 баллов)

Решение.

Все решения лежат в прямоугольнике

$$\Pi = \{0 < x < 76;\ \ 0 < y < 41\}.$$

Нас интересует количество целочисленных точек, лежащих внутри Π ниже его диагонали $x/76 + y/41 = 1$. На самой диагонали нет целочисленных точек, т.к. 76 и 41 взаимно просты. Так что получаем половину количества целочисленных точек внутри Π:

$$\frac{75 \cdot 40}{2} = 1500.$$

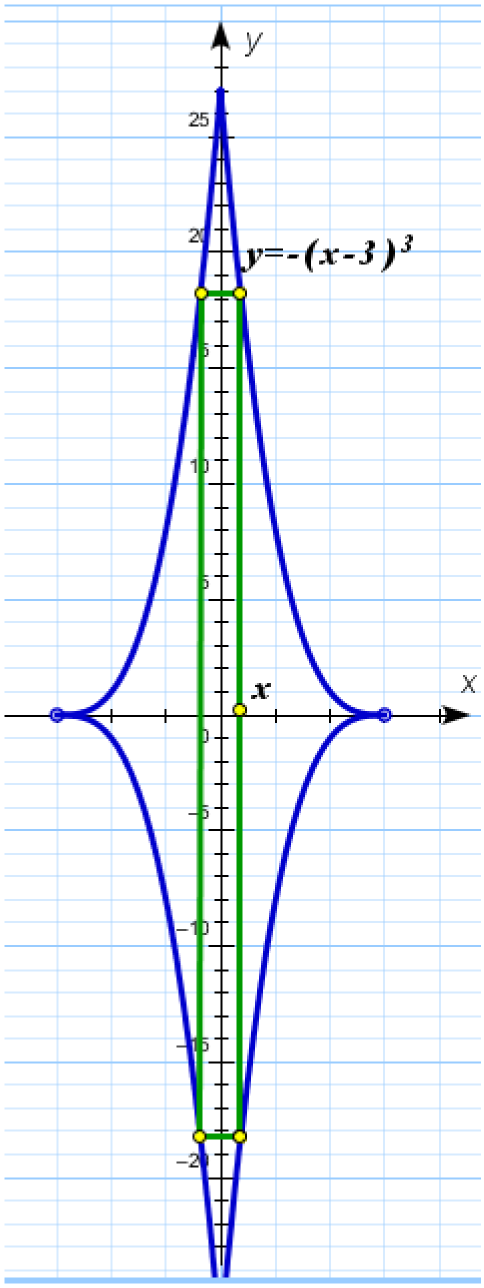
Ответ: 1500

6. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению

$$|y+1|(y^2+2y+28)+|x-2|=9(y^2+2y+4),$$

а стороны параллельны осям координат?

(12 баллов)



Решение.

$$|y+1|((y+1)^2+27)+|x-2|=9(y+1)^2+27$$

Замена: $x_1=y+1, y_1=x-2$.

Тогда $\quad |y_1|=-(|x_1|-3)^3$

Площадь прямоугольника при такой замене не меняется. Площадь вычисляется по формуле $S(x)=-4x(x-3)^3, x\in[0;3]$.

Имеем

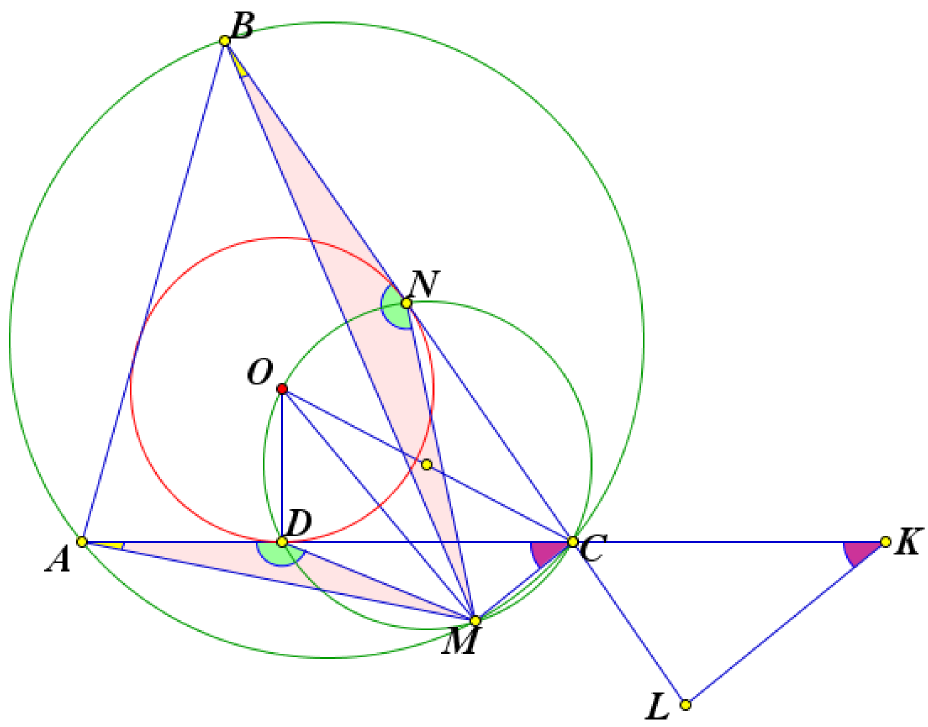
$$S'(x)=-4((x-3)^3+3x(x-3)^2)$$
$$=-4(x-3)^2(4x-3).$$

В точке $x=\frac{3}{4}$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение. $S_{max}=S(0{,}75)=34{,}171875$.

Ответ: $\mathbf{34,171875}$

7. Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса 3 касается стороны AC в точке D. На продолжениях сторон AC и BC за точку C взяты точки K и L соответственно, угол CKL равен 30°. Длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC. На описанной около треугольника ABC окружности выбрана точка M так, что $CM \parallel KL$. Найдите косинус угла ACB, если длина отрезка DM равна 6. (16 баллов)

Решение. Докажем, что угол $\angle OMC=90°$. Построим окружность S с диаметром OC. Обозначим точку пересечения (отличную от C) этой окружности с описанной около треугольника ABC через M_1. Обозначим точку пересечения (отличную от C) окружности S с прямой, параллельной KL, через M_2. Необходимо доказать, что $M_1=M_2$.



Докажем подобие треугольников ADM_1 и BNM_1. Согласно свойствам вписанных углов, имеем $\angle M_1AC = \angle M_1BC \Rightarrow \angle M_1AB = \angle M_1BN$; $\angle M_1NC = \angle M_1DC \Rightarrow \angle ADM_1 = \angle BNM_1$. Следовательно, $\Delta ADM_1 \sim \Delta BNM_1$ по двум углам. Тогда $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{AD}{BN}$. Поскольку длины отрезков AK и BL равны полупериметру треугольника ABC, то $AD = CL, BN = CK$. Получаем $\frac{DM_1}{M_1N} = \frac{CL}{CK}$.

Обозначим $\angle ACM_2 = \angle CKL = \alpha$, $\angle KCL = \beta$.

Тогда $\angle ACB = \beta, \angle M_2CB = \alpha + \beta$. Для треугольников DM_2C и M_2NC применим теорему синусов: $\frac{DM_2}{\sin\alpha} = \frac{M_2C}{\sin\angle M_2DC}$; $\frac{NM_2}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{M_2C}{\sin\angle M_2NC}$. Поскольку $\angle M_2DC = \angle M_2NC$, то $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Поскольку $\angle CLK = 180 - (\alpha+\beta)$, то, применяя теорему синусов для треугольника CLK, имеем $\frac{CL}{CK} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Таким образом, $\frac{DM_2}{NM_2} = \frac{CL}{CK} = \frac{DM_1}{NM_1}$. Точки D, N, M_1, M_2 лежат на одной окружности, следовательно, $M_1 = M_2$.

Треугольник OMC прямоугольный, радиус описанной окружности равен $CO/2$. Эта же окружность описана около треугольника CDM.

$$OC = \frac{OD}{\sin(\beta/2)} = \frac{3}{\sin(\beta/2)}.$$

Угол CKL равен углу DCM. Тогда $\sin CKL = \frac{DM}{2R_{\text{оп}}} = \frac{DM}{OC} = 0{,}5$. Следовательно, $\sin(\beta/2) = 0{,}25$, $\cos\beta = 1 - 2\sin^2(\beta/2) = 7/8 = 0{,}875$.

Ответ: 0,875

8. Укажите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$2\sin(\pi-\frac{\pi x^2}{12})\cos(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2})+1=a+2\sin(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2})\cos(\frac{\pi x^2}{12})$. (16 баллов)

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$2\sin(\pi-\frac{\pi x^2}{12})\cos(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2})-2\sin(\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2})\cos(\pi-\frac{\pi x^2}{12})=a-1$, или

$\sin(\pi-\frac{\pi x^2}{12}-\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2})=\frac{a-1}{2}$.

Рассмотрим отдельно выражение $t=\pi-\frac{\pi x^2}{12}-\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}$, его можно переписать в виде:

$$\pi-\frac{\pi x^2}{12}-\frac{\pi}{6}\sqrt{9-x^2}=\frac{\pi}{12}(12-x^2-2\sqrt{9-x^2})=\frac{\pi}{12}\left(9-x^2-2\sqrt{9-x^2}+3\right)$$
$$=\frac{\pi}{12}\left((\sqrt{9-x^2}-1)^2+2\right).$$

Учитывая, что корень принимает значения от 0 до 3, то $t\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, тогда $\sin t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Найдем, в каких пределах изменяется параметр: $\frac{1}{2}\le\frac{a-1}{2}\le 1\Rightarrow 2\le a\le 3$.

Ответ: 2

9. Ромб *ABCD* является основанием пирамиды с вершиной *S*. Все ее боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом $60°$. Точки *M*, *N*, *K* и *L* являются серединами сторон ромба *ABCD*. На прямоугольнике *MNKL*, как на основании, построен прямоугольный параллелепипед. Ребра верхней грани параллелепипеда (противоположной грани *MNKL*) пересекают боковые ребра пирамиды *SABCD*, соответственно, в точках *F*, *P*, *R* и *Q*. Объем многогранника с вершинами в точках *M*, *N*, *K*, *L*, *F*, *P*, *R*, *Q* равен $12\sqrt{3}$, а радиус вписанной в ромб *ABCD* окружности равен 2,4. Найдите сторону ромба *ABCD*. (16 баллов)

Решение.

Высота пирамиды $SO=h$. Диагонали ромба $AC=d_1, BD=d_2$.
Высота параллелепипеда $h/2$, стороны основания параллелепипеда равны
$d_1/2$ и $d_2/2$.
Объем параллелепипеда равен

$$V_{\text{п}}=\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\cdot\frac{h}{2}$$

Объем многогранника равен

$$V_{\text{м}}=V_{\text{п}}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{4}\cdot\frac{d_2}{4}\cdot\frac{h}{2}=\frac{d_1d_2h}{8}-\frac{d_1d_2h}{48}=\frac{5d_1d_2h}{48}$$

По условию $\frac{5d_1d_2h}{48} = 12\sqrt{3}$. Поскольку радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2,4, а все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°, то $h = 2{,}4\sqrt{3}$. Следовательно, $\frac{5d_1d_2 \cdot 2{,}4\sqrt{3}}{48} = 12\sqrt{3}$, и $d_1d_2 = 48$.

Поскольку $S_{ABCD} = \frac{d_1d_2}{2}$, и $S_{ABCD} = \frac{4AB \cdot r_{вп}}{2} = 4{,}8 \cdot AB$, то $4{,}8 \cdot AB = 24 \Rightarrow AB = 5$.

Ответ: 5