

### Вариант № 1 (11 класс, отборочный этап)

1. Производство керамических изделий состоит из 3 последовательных этапов: формование керамического изделия на гончарном круге в течение 15 минут, сушка в течение 10 минут, и обжиг в течение 30 минут. Требуется изготовить 75 изделий. Как распределить 13 мастеров на формовщиков и обжигальщиков для работы на 1 и 3 этапах соответственно в течение всего отведенного на этап времени (для сушки изделий рабочие не требуются), чтобы выполнить работу за кратчайшее время? В ответ запишите кратчайшее время (в минутах), необходимое для выполнения всей работы. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение  $\frac{15}{x(\sqrt[3]{35-8x^3})} = 2x + \sqrt[3]{35-8x^3}$ . В ответ запишите сумму всех полученных решений. (5 баллов)

3. Найдите все натуральные значения  $n$ , при которых

$$\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \dots + \cos \frac{2\pi n}{9} = \cos \frac{\pi}{9}, \text{ и } \log_2^2 n + 45 < \log_2 8n^{13}.$$

В ответ запишите сумму полученных значений  $n$ . (6 баллов)

4. Сколькими способами можно распилить ствол бамбука (неоднородный природный материал) длиной 4 м на три части, длины которых кратны 1 дм, и из которых можно составить треугольник? (12 баллов)

5. Сколько решений в натуральных числах  $x, y$  имеет неравенство  $x/76 + y/71 < 1$ ? (12 баллов)

6. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению

$$|y + 1|(y^2 + 2y + 28) + |x - 2| = 9(y^2 + 2y + 4), \text{ а стороны параллельны осям координат?} \quad (12 \text{ баллов})$$

7. Вписанная в треугольник  $ABC$  окружность радиуса 3 касается стороны  $AC$  в точке  $D$ . На продолжениях сторон  $AC$  и  $BC$  за точку  $C$  взяты точки  $K$  и  $L$  соответственно, угол  $CKL$  равен  $30^\circ$ . Длины отрезков  $AK$  и  $BL$  равны полупериметру треугольника  $ABC$ . На описанной около треугольника  $ABC$  окружности выбрана точка  $M$  так, что  $CM \parallel KL$ . Найдите косинус угла  $ACB$ , если длина отрезка  $DM$  равна 6. (16 баллов)

8. Укажите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$$2 \sin\left(\pi - \frac{\pi x^2}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} \sqrt{9 - x^2}\right) + 1 = a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} \sqrt{9 - x^2}\right) \cos\left(\frac{\pi x^2}{12}\right). \quad (16 \text{ баллов})$$

9. Ромб  $ABCD$  является основанием пирамиды с вершиной  $S$ . Все ее боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом  $60^\circ$ . Точки  $M, N, K$  и  $L$  являются серединами сторон ромба  $ABCD$ . На прямоугольнике  $MNKL$ , как на основании, построен прямоугольный параллелепипед. Ребра верхней грани параллелепипеда (противоположной грани  $MNKL$ ) пересекают боковые ребра пирамиды  $SABCD$ , соответственно, в точках  $F, P, R$  и  $Q$ . Объем многогранника с вершинами в точках  $M, N, K, L, F, P, R, Q$  равен  $12\sqrt{3}$ , а радиус вписанной в ромб  $ABCD$  окружности равен 2,4. Найдите сторону ромба  $ABCD$ . (16 баллов)