

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

Отборочный этап

10 класс

1. Найдите наибольшее значение выражения $x+y$, где x, y – решения в целых числах уравнения $3x^2 + 5y^2 = 345$

Решение

Заметим, что 345 и $5y^2$ делятся на 5, тогда и $3x^2$ должно делиться на 5. Следовательно, $x = 5t, t \in Z$. Аналогично, $y = 3n, n \in Z$. После сокращения, уравнение примет вид $5t^2 + 3n^2 = 23$. Следовательно, $t^2 \leq \frac{23}{5}$, $n^2 \leq \frac{23}{3}$ или $|t| \leq 2, |n| \leq 2$. Перебрав соответствующие значения t, n , получим, что $|t| = 2, |n| = 1$ или

$$\begin{cases} x_1 = -10 \\ y_1 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -10 \\ y_2 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 10 \\ y_3 = -3 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = 10 \\ y_4 = 3 \end{cases}.$$

Наибольшее значение выражения $x + y$ равно $10+3=13$.

Ответ. 13.

2. Автомобиль проехал половину пути со скоростью 60 км/ч, затем одну треть оставшегося пути со скоростью 120 км/ч и оставшееся расстояние со скоростью 80 км/ч.

Найдите среднюю скорость автомобиля в этом рейсе. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Пусть x часов автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, тогда

$60x = \frac{s}{2}$ Пусть y часов автомобиль ехал со скоростью 120 км/ч, тогда

$120y = \frac{s}{6}$. Пусть z часов автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, тогда

$80z = \frac{s}{3}$. По определению $v_{cp} = \frac{s}{t_{общ}}$. Тогда

$$v_{cp} = \frac{s}{x+y+z} = \frac{s}{\frac{s}{120} + \frac{s}{720} + \frac{s}{240}} = \frac{1}{\frac{1}{120} + \frac{1}{6 \cdot 120} + \frac{1}{2 \cdot 120}} = \frac{6 \cdot 120}{10} = 72.$$

Ответ: 72.

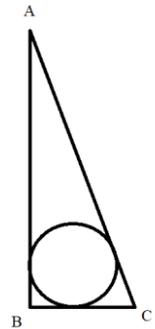
3.

Найдите радиус окружности, касающейся меньшей стороны и продолжений двух других сторон прямоугольного треугольника, если две его меньшие стороны равны 13 и 84 соответственно.

Решение

- $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2};$
 $AC = \sqrt{84^2 + 13^2} = \sqrt{7056 + 169} = \sqrt{7225} = 85$
- $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC; S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot 13 = 42 \cdot 13 = 546$
- $r_6 = \frac{S_{\triangle}}{p} = \frac{546 \cdot 2}{84 + 13 + 85} = \frac{1092}{182} = 6$

Ответ: 6



4.

На координатной прямой отмечено 16 точек, которые пронумерованы слева направо. Координата любой точки, кроме крайних, равна полусумме координат двух соседних точек. Найдите координату пятой точки, если первая точка имеет координату 2, а шестнадцатая – координату 47.

Решение

Решение. Пусть a, b и c - координаты трёх точек, отмеченных подряд (слева направо). Тогда $b = \frac{a+c}{2}$, значит, вторая точка является серединой отрезка с концами в соседних точках. Это условие выполняется для любой тройки точек, идущих подряд, значит, расстояния между любыми соседними точками одинаковые. Расстояние между крайними точками равно $47-2=45$, между ними 15 одинаковых промежутков, поэтому расстояние между соседними точками равно $45:15=3$. Между пятой и первой точкой 4 одинаковых промежутка длины 3, значит координата пятой точки равна $2 + 3 \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14

5.

В сосуд вместимостью 6 л налито 4 л 70%-ного (по объёму) раствора серной кислоты, во второй сосуд той же вместимости налито 3 л 90% -ного раствора серной кислоты. Из второго сосуда в первый переливают некоторое количество раствора так, что в нём получается r -% -ный раствор серной кислоты. Найдите наибольшее целое значение r , при котором задача имеет решение.

Решение.

Пусть из второго сосуда перелито в первый x литров раствора. Поскольку из условия следует, что $0 \leq x \leq 2$, то для нахождения чистой кислоты в новом растворе получаем равенство $2,8 + 0,9x = (4 + x) \frac{r}{100}$, откуда $x = \frac{4r - 280}{90 - r}$. Теперь, учитывая, что $x \in [0; 2]$, заключаем, что задача имеет решение лишь при $r \in \left[70; \frac{230}{3}\right]$. Таким образом наибольшее целое r , при котором задача имеет решение – это 76.

Ответ: 76

6.

Найдите корни уравнения $f(x) = 8$, если $4f(3-x) - f(x) = 3x^2 - 4x - 3$ для любого действительного значения x . В ответе укажите произведение найденных корней.

Решение:

Заметим, что при замене x на $3-x$ выражение $3-x$ меняется на x . То есть пара $f(x)$ и $f(3-x)$ инвариантна относительно данной замены. Заменим x на $3-x$ в уравнении, данном в условии задачи. Получим:

$4f(x) - f(3-x) = 3(3-x)^2 - 4(3-x) - 3 = 3x^2 - 14x + 12$. Выразим $f(x)$ из системы:
$$\begin{cases} 4f(3-x) - f(x) = 3x^2 - 4x - 3 \\ 4f(x) - f(3-x) = 3x^2 - 14x + 12 \end{cases}$$
. Умножим второе уравнение

системы на 4 и сложим с первым, получим: $15f(x) = 15x^2 - 60x + 45$;

$f(x) = x^2 - 4x + 3$. Составим уравнение: $x^2 - 4x + 3 = 8$; $x^2 - 4x - 5 = 0$; его корни $x_1 = -1$; $x_2 = 5$. Произведение корней равно (-5).

Ответ: -5.

7.

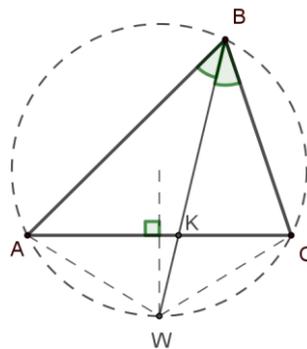
В треугольнике ABC проведена биссектриса AL ($L \in BC$), M и N точки на двух других биссектрисах (или на их продолжениях) такие, что $MA = ML$ и $NA = NL$, $\angle BAC = 50^\circ$.
Найти величину $\angle MAN$ в градусах.

Решение

Вспользуемся вспомогательными утверждениями.

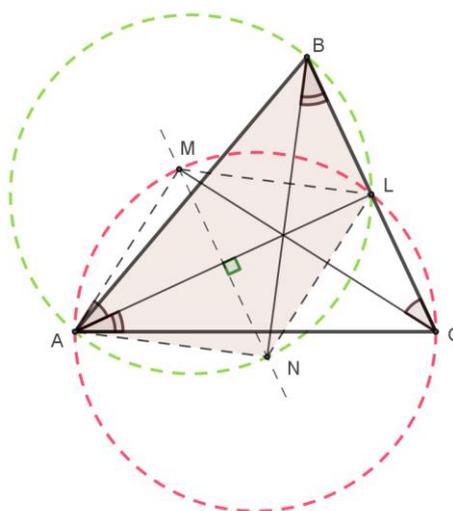
Если биссектриса BK в треугольнике ABC пересекает описанную окружность в точке W , то:

- 1) $AW = CW$ (так как $\angle CAW = \angle CBW = \angle ABW = \angle ACW$, то есть треугольник AWC равнобедренный и $AW = CW$).



- 2) Точка W лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC .
- 3) Биссектриса угла неравнобедренного треугольника и серединный перпендикуляр к противоположной стороне пересекаются на описанной окружности.

Далее, рассмотрим треугольник ABL ($AB \neq BL$), MN серединный перпендикуляр к AL и BN – биссектриса угла B . Следовательно, точки A, B, L, N лежат на одной окружности.



Аналогично, точки A, C, L, M лежат на одной окружности.

Тогда:

$$\begin{aligned} \angle MAN &= \angle LAM + \angle LAN = \angle LCM + \angle NBL = \\ &= \frac{\angle C + \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 65^\circ. \end{aligned}$$

Ответ. 65.

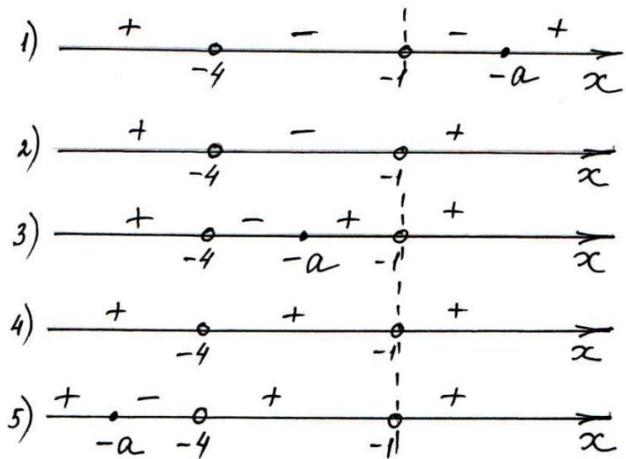
8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\frac{x^2 + (a+1)x + a}{x^2 + 5x + 4} \geq 0$ является объединение трёх непересекающихся интервалов. В ответе укажите сумму трёх наименьших целых значений a из полученного интервала.

Решение

Разложим на множители числитель и знаменатель левой части неравенства, оно примет вид: $\frac{(x+1)(x+a)}{(x+1)(x+4)} \geq 0$. Возможно пять случаев расположения

числа $(-a)$ относительно чисел (-4) и (-1) . В каждом из случаев неравенство решается методом интервалов на числовой оси (см. рис.2). Выпишем результаты исследования: 1)

- $-a > -1; a < 1$
 $x \in (-\infty; -4) \cup [-a; +\infty)$ - не подходит; 2) $-a = -1; a = 1$
 $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$ - не подходит; 3) $-4 < -a < -1;$
 $a \in (1; 4)$
 $x \in (-\infty; -4) \cup [-a; -1) \cup (-1; +\infty)$ - подходит; 4) $-a = -4; a = 4$
 $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -1) \cup (-1; +\infty);$ 5)



$-a < -4; a > 4$ $x \in (-\infty; -a] \cup (-4; -1) \cup (-1; +\infty)$ - подходит. Таким образом, ответу на вопрос задачи удовлетворяют $a \in (1; +\infty)$. Наименьшие целые числа, входящие в данный интервал, это 2, 3 и 4. $2+3+4=9$.

Ответ: 9.

9.

Вычислив число 8^{2021} , подсчитали сумму цифр в этом числе и записали полученный результат. Затем в новом записанном числе подсчитали сумму цифр и снова записали результат. Эти действия повторяли до тех пор, пока не получили однозначное число. Найти это число.

Решение.

Рассмотрим натуральные степени 8. Заметим, что четные степени числа 8 при делении на 9 дают остаток 1, а нечетные (включая и число 8^{2021}) – остаток 8. Действительно, проанализируем степени 8:

$$8^2 = (9 - 1)^2 = 9n + 1, \quad n \in N,$$

$$8^3 = (9n + 1) \cdot 8 = 9k + 8, \quad k \in N,$$

$$8^4 = (9k + 8) \cdot 8 = 9k \cdot 8 + 8^2 = 9k \cdot 8 + 9n + 1 = 9 \cdot s + 1, \quad s \in N.$$

Предположив, что $8^{2m-1} = 9t + 8$, $t \in N, m \in N, m \geq 2$, получим:

$$8^{2m} = 8^{2m-1} \cdot 8 = (9t + 8) \cdot 8 = 9t \cdot 8 + 8^2 = 9t \cdot 8 + 9n + 1 = 9q + 1, \quad q \in N,$$

$$8^{2m+1} = 8^{2m} \cdot 8 = (9q + 1) \cdot 8 = 9q \cdot 8 + 8.$$

Так как целое число при делении на 9 дает тот же остаток, что и сумма цифр этого числа, то сумма цифр числа 8^{2021} и суммы цифр последующих результатов суммирования при делении на 9 имеют один и тот же остаток 8.

Ответ. 8.