

**Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике**

9-й класс

Вариант №1

№1. Количество студентов юношей в университете на 35% больше, чем студентов девушек. Все обучающиеся распределены по двум корпусам, причём в первом корпусе учатся $\frac{2}{5}$ всех юношей, а во втором - $\frac{4}{7}$ всех девушек. Сколько всего обучающихся в университете, если известно, что в первом корпусе учатся меньше 2500, а во втором больше 2500 человек?

Решение:

Пусть в университете учатся n девушек, тогда число юношей $1,35n = \frac{27}{20}n$, отсюда можно сделать вывод, что число n кратно 20, то есть $n = 20m$.

Значит, число девушек $20m$, а юношей $27m$.

В первом корпусе учатся $\frac{2}{5}$ всех юношей, то есть $\frac{2}{5} \cdot 27m = \frac{54}{5}m$ студентов, во втором корпусе учатся $\frac{4}{7}$ всех девушек, то есть $\frac{4}{7} \cdot 20m = \frac{80}{7}m$ студенток.

Для выполнения условия целочисленности необходимо, чтобы число m было кратно 35, то есть $m = 35k$.

Тогда в первом корпусе $\frac{2}{5} \cdot 27m = \frac{54}{5}m = \frac{54}{5} \cdot 35k = 378k$ студентов,

$\frac{4}{7} \cdot 20m = \frac{80}{7}m = \frac{80}{7} \cdot 35k = 400k$ студенток и всего $778k$ человек,

а во втором корпусе $\frac{3}{5} \cdot 27m = \frac{81}{5}m = \frac{81}{5} \cdot 35k = 567k$ студентов,

$\frac{4}{7} \cdot 20m = \frac{80}{7}m = \frac{80}{7} \cdot 35k = 400k$ студенток и всего $967k$ человек.

По условию задачи $\begin{cases} 678k < 2500 \\ 967k > 2500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 3\frac{466}{678} \\ k > 2\frac{566}{967} \end{cases}$, следовательно, $k = 3$, а

общее число обучающихся равно $678k + 967k = 1645k = 4935$.

Ответ: 4935.

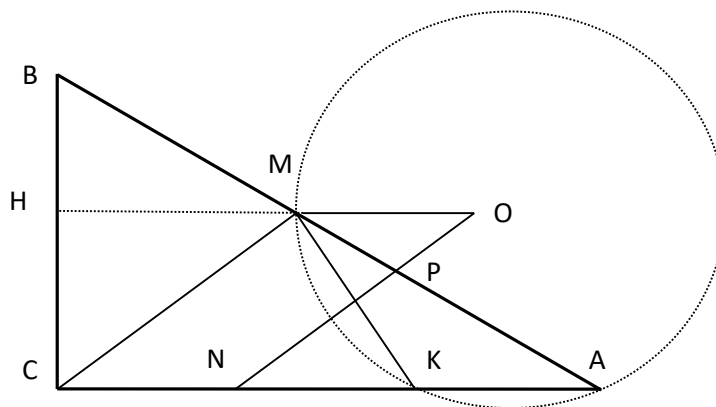
Критерии

Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

№2. В треугольнике ABC угол C – прямой. Прямая МК перпендикулярна медиане CM и пересекает AC в точке K. Известно, что CK:KA = 5:3. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника MAK. Найдите площадь треугольника OBC, если BC = 4.

Решение.

По свойству медианы прямоугольного треугольника $CM = BM = AM = x$. Пусть $CK = k$, $KA = n$. Треугольники ABC и CKM – прямоугольные и подобны по острому углу $\angle MAC = \angle MCA$ (MCA – равнобедренный). Поэтому, $x:k = (k+n):2x$ или $x = \sqrt{\frac{k(k+n)}{2}}$.



По теореме синусов для треугольника MAK получим: $2R = \frac{MK}{\sin \angle MAC} = \frac{MK}{\sin \angle MCA} = CK$, т.е. радиусы окружностей, описанных около треугольников MAK и CMK с центрами в точках O и N соответственно равны. Так как МК – общая хорда равных окружностей, то NO – серединный перпендикуляр к ней и $NO = \sqrt{4R^2 - MK^2} = \sqrt{k^2 - CK^2 + CM^2} = CM$.

По условию задачи $CM \perp MK \Rightarrow CM \parallel ON \Rightarrow CMON$ – параллелограмм, т.е.

$OM = CN = k/2$, $CN \parallel OM \Rightarrow OM \perp BC$. Поэтому, OH – высота треугольника OBC и

$$OH = OM + MH = OM + \frac{AC}{2} = R + \frac{k+n}{2} = \frac{k}{2} + \frac{k+n}{2} = k + \frac{n}{2}.$$

По условию $k:n = 5:3 \Rightarrow OH = 1,3k$. Из исходного треугольника, по Теореме Пифагора ($BC = 4, AC = 1,6k, AB = 2x = 4k\sqrt{0,2}$): $16 + 2,26k^2 = 3,2k^2 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow k = 5$.

$$S_{Boc} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,3 \cdot 5 = 13.$$

Ответ: 13.

Критерии

Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Доказано, что $CMON$ – параллелограмм,
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

№3. При каких значениях параметра a существует хотя бы одна пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая равенству $x^2 + 2y^2 + 3a^2 + xy + 2ax + 3ay - 10 = 0$?

Решение:

Перепишем уравнение как квадратное относительно x :

$$x^2 + (2a + y)x + 2y^2 + 3a^2 + 3ay - 10 = 0,$$

$$D = (2a + y)^2 - 4 \cdot (2y^2 + 3a^2 + 3ay - 10) = -7y^2 - 8a^2 - 8ay + 40,$$

Уравнение имеет решения, если $D \geq 0$, то есть $-7y^2 - 8a^2 - 8ay + 40 \geq 0$

или $7y^2 + 8ay + 8a^2 - 40 \leq 0$ (*).

Пусть $f(y) = 7y^2 + 8ay + 8a^2 - 40$ - это квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Неравенство (*) имеет решения, если значение функции $f(y)$ в вершине параболы неположительно, то есть

$$f(y_0) = 7y_0^2 + 8ay_0 + 8a^2 - 40 \leq 0, \quad y_0 = -\frac{4a}{7}$$

$$f(y_0) = \frac{40}{7}a^2 - 40 \leq 0, \text{ что верно при } a^2 \leq 7 \text{ или } a \in [-\sqrt{7}; \sqrt{7}].$$

Ответ: $a \in [-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4(б). По чертежам и данным задачи 4а, определите длину отрезка АЕ.

Решение задачи 4б (КМиГ, деталь №3).

- 1) Пусть E_1 - проекция точки Е на плоскость АВС. По условию задачи 4а (см. файл деталь3) расстояние между плоскостями АВС и DEF равно 20. Следовательно, $EE_1 = 20$.
- 2) По чертежу на первой странице, расстояние от точки E_1 до прямой АВ равно 20, а от проекции точки E_1 на прямую АВ до точки А равно 10.
- 3) Таким образом, по теореме Пифагора, расстояние от точки E_1 до точки А равно $AE_1 = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$.
- 4) По теореме Пифагора для треугольника AE_1E ,
 $AE = \sqrt{AE_1^2 + EE_1^2} = \sqrt{500 + 20^2} = \sqrt{900} = 30$.

Ответ: 30.

Критерии

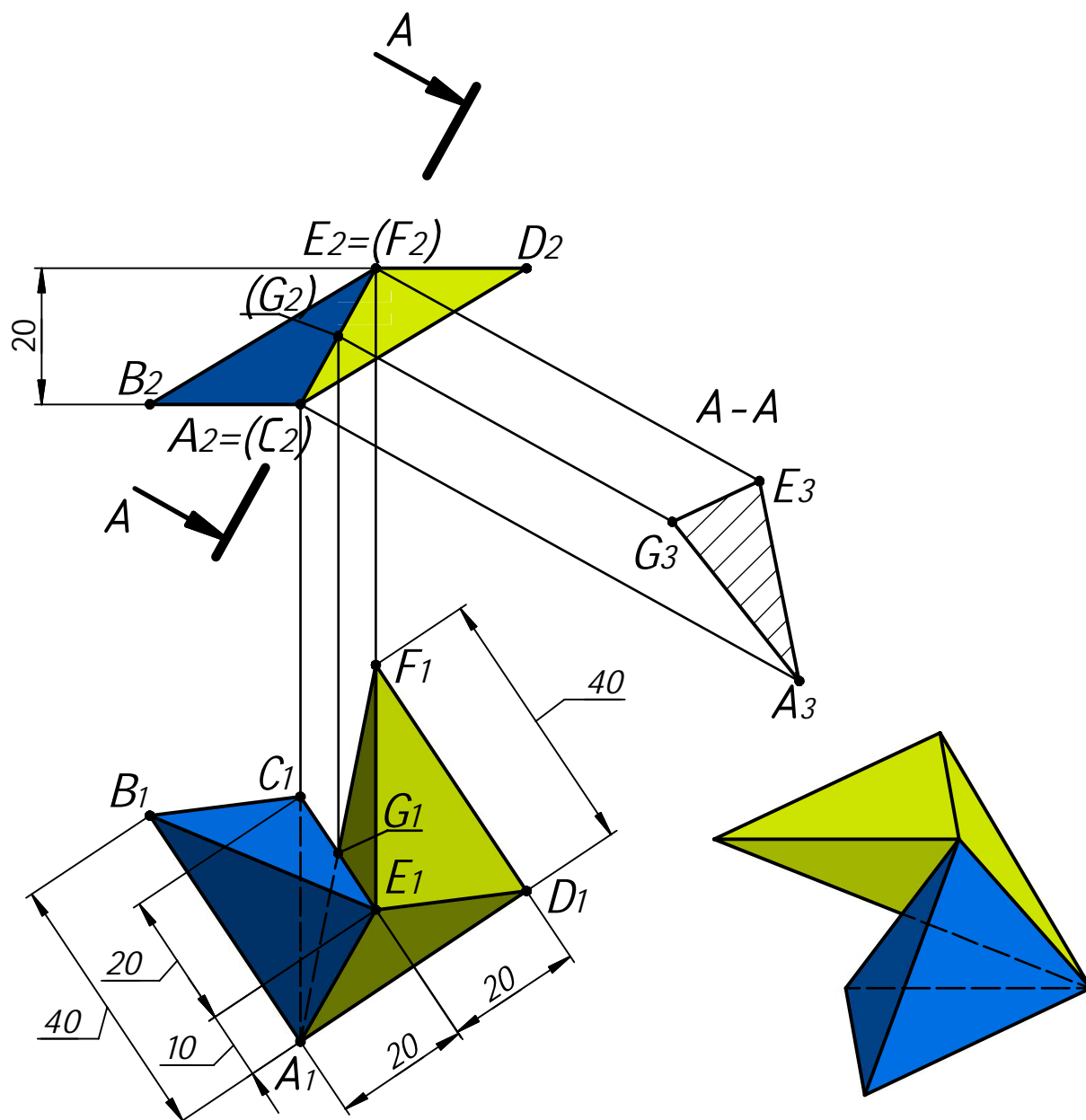
Баллы	Критерии выставления баллов
10	Полное решение. Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно найдено AE_1 или дважды правильно применена теорема Пифагора, но допущена арифметическая ошибка
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF . Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на 20 мм.

Требуется:

- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид $ABCE$ и $DEFA$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;
- 3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;
- 4) обозначить видимость ребер пирамид;
- 5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;
- 6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.



Задача 5 (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:

- 1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках A и B, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
- 2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
- 3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза A-A
- 4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
- 5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
- 6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
- 7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
- 8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Построения выполнить на обратной стороне листа.

