

Олимпиада школьников "Шаг в будущее"

Профиль: компьютерное моделирование и графика; тур по математике и инженерной графике

Вариант: 3

Класс: 10

Задача 1 (10 баллов). Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ удовлетворяет неравенствам $a_n - 2022a_{n+1} + 2021a_{n+2} \geq 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots, 98$, и $a_{99} - 2022a_{100} + 2021a_1 \geq 0$, $a_{100} - 2022a_1 + 2021a_2 \geq 0$. Найдите a_{22} , если $a_{10} = 10$.

Задача 2 (10 баллов). Найдите вероятность того, что случайно выбранное натуральное пятизначное число с неповторяющимися цифрами, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, делится на 8 без остатка.

Задача 3 (12 баллов). Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \frac{|x-0,5|+|y|-a}{\sqrt{3}y-x} = 0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. Укажите количество различных решений этой системы при каждом найденном значении параметра a .

Задача 4а (10 баллов). См. лист 2.

Задача 4б (8 баллов). Найдите площадь треугольника AGE , где G – точка пересечения BD и AF (см. условие задачи 4а).

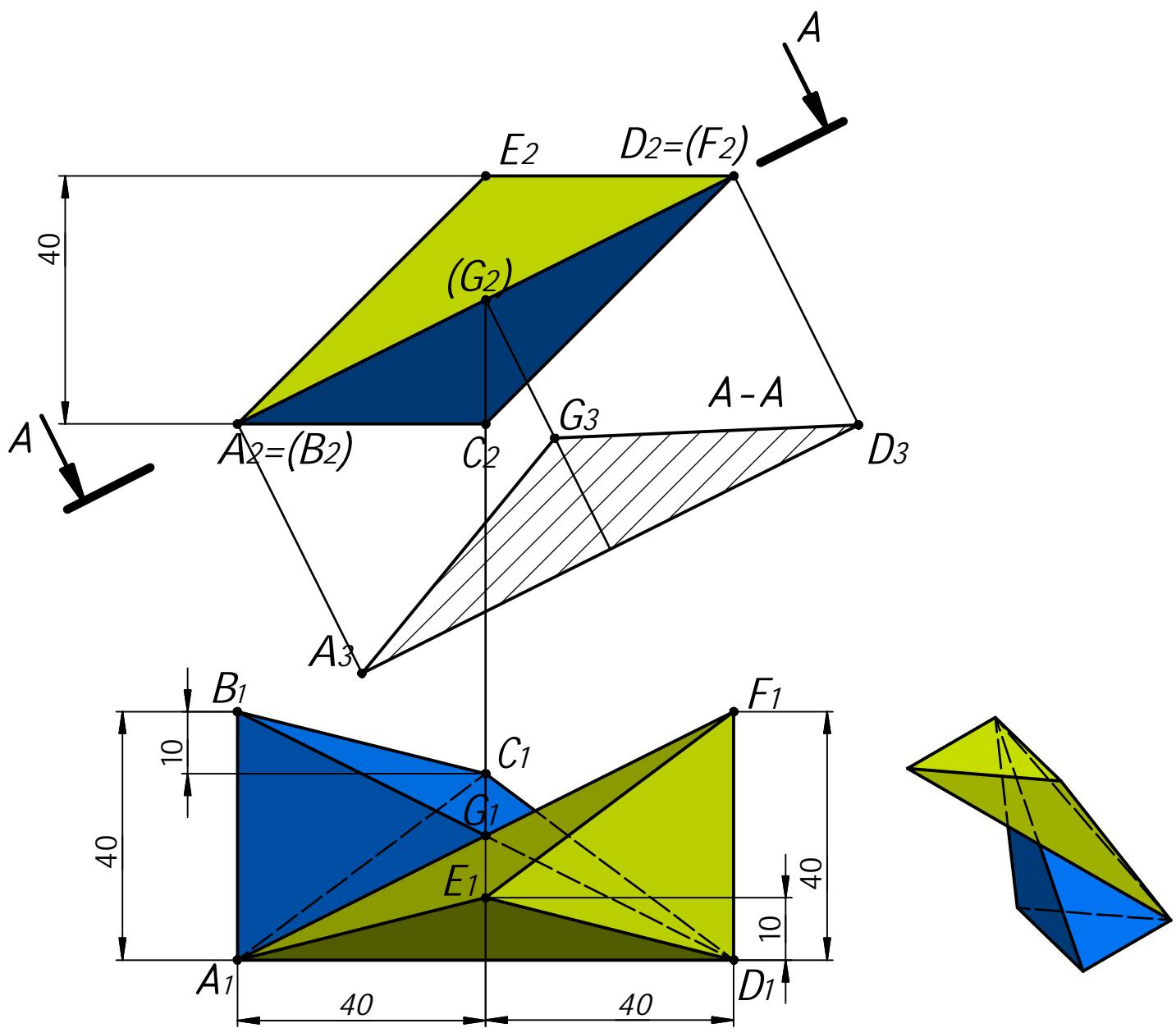
Задача 5 (20 баллов). См. лист 3.

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF . Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на 40 мм.

Требуется:

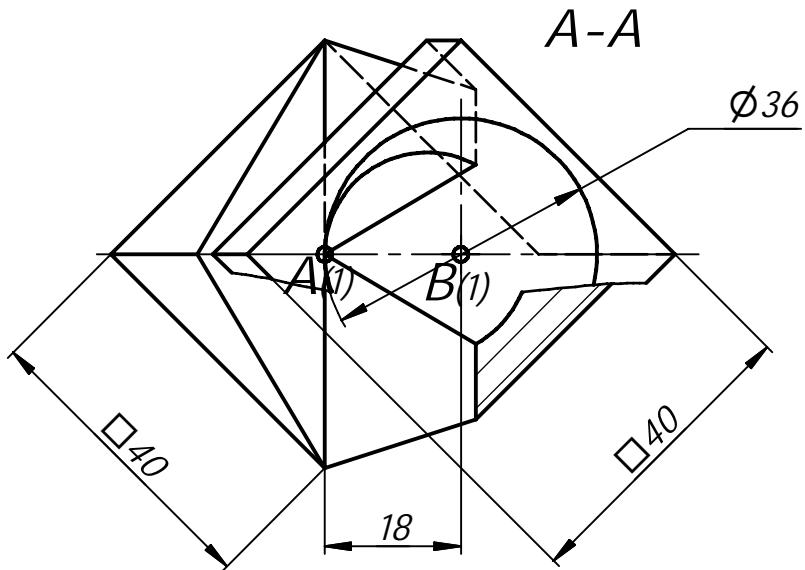
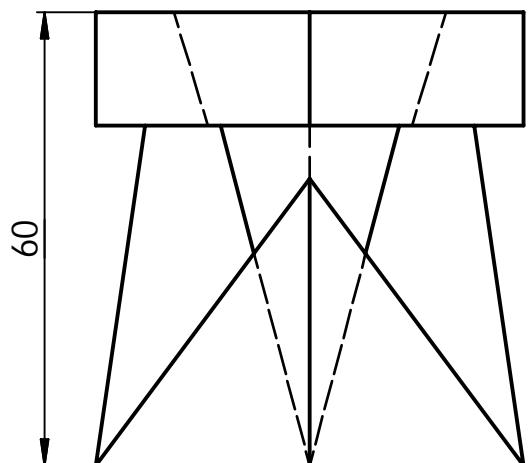
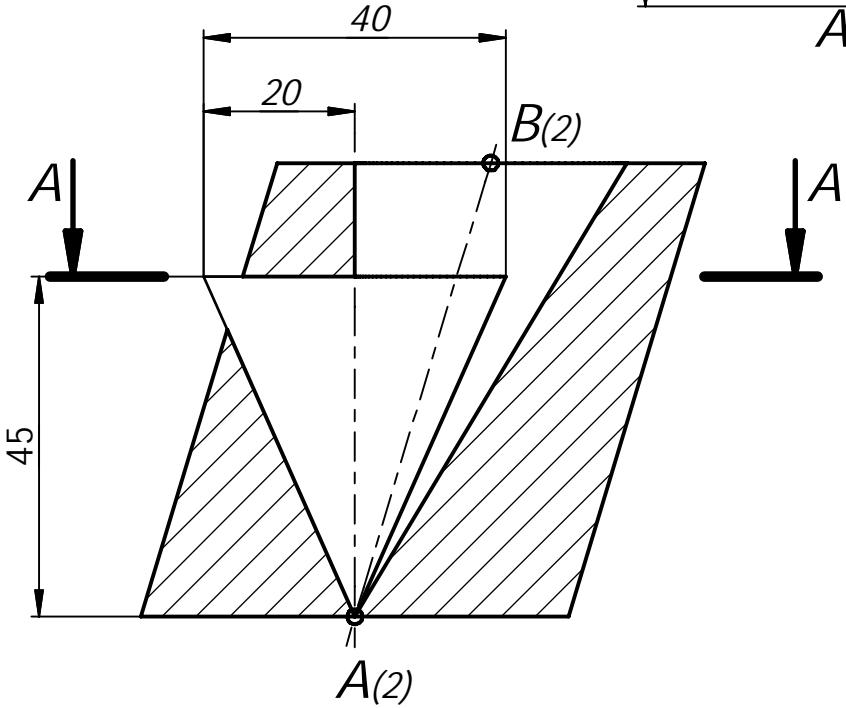
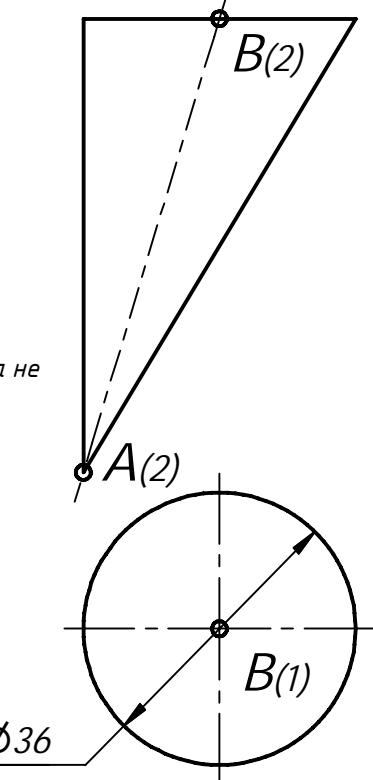
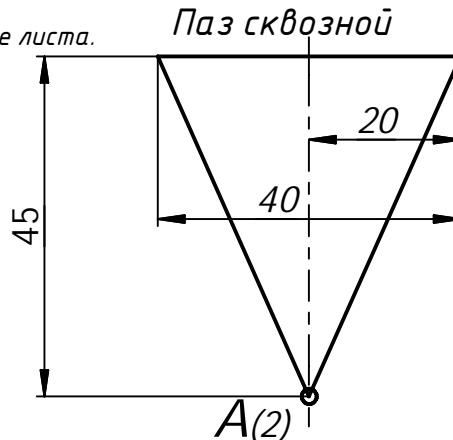
- 1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид $ABCD$ и $DEFA$ с соблюдением проекционной связи;
- 2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;
- 3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;
- 4) обозначить видимость ребер пирамид;
- 5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;
- 6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.



Задача 5 (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:

- 1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках А и В, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
 - 2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
 - 3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А
 - 4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
 - 5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
 - 6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
 - 7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
 - 8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Все построения выполнить на обратной стороне листа.



Решение варианта №3 (Математика - 10 класс)

1. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ удовлетворяет неравенствам $a_n - 2022a_{n+1} + 2021a_{n+2} \geq 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots, 98$, и $a_{99} - 2022a_{100} + 2021a_1 \geq 0$, $a_{100} - 2022a_1 + 2021a_2 \geq 0$. Найдите a_{22} , если $a_{10} = 10$. (10 баллов)

Решение.

Обозначим $b = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$, $b_n = a_n - 2022a_{n+1} + 2021a_{n+2}, n = 1, 2, 3, \dots, 98$, $b_{99} = a_{99} - 2022a_{100} + 2021a_1, b_{100} = a_{100} - 2022a_1 + 2021a_2$. По условию $b_n \geq 0$, при $n = 1, 2, 3, \dots, 100$. Имеем $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{100} = b - 2022b + 2021b = 0$. Следовательно, $b_n = 0$, при $n = 1, 2, 3, \dots, 100$. Отсюда получаем $(a_n - a_{n+1}) + 2021(a_{n+2} - a_{n+1}) = 0, n = 1, 2, 3, \dots, 98$, $a_{99} - a_{100} + 2021(a_1 - a_{100}) = 0$, $(a_{100} - a_1) + 2021(a_2 - a_1) = 0$.

Имеем $a_2 - a_3 = \frac{a_1 - a_2}{2021}$, $a_3 - a_4 = \frac{a_1 - a_2}{2021^2}$, ..., $a_{99} - a_{100} = \frac{a_1 - a_2}{2021^{98}}$, $a_{100} - a_1 = \frac{a_1 - a_2}{2021^{99}}$. С учетом равенства $a_{100} - a_1 = 2021(a_1 - a_2)$ имеем $\frac{a_1 - a_2}{2021^{99}} = 2021(a_1 - a_2)$. Отсюда получаем $a_n = a_1$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots, 100$. Следовательно, $a_{22} = a_{10} = 10$.

Ответ: 10.

2. Найдите вероятность того, что случайно выбранное натуральное пятизначное число с неповторяющимися цифрами, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, делится на 8 без остатка. (10 баллов)

Решение. Натуральное число n делится на 8 без остатка, если число, составленное из трех последних цифр в записи числа n (в порядке их следования), делится на 8. Если же число, составленное из трех последних цифр, не делится на 8, то и число n не делится на 8.

Найдем количество трехзначных натуральных чисел, составленных из неповторяющихся цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и делящихся на 8. Эти числа также делятся на 4. Найдем сначала все двузначные числа, составленные из неповторяющихся цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, которые делятся на 4. Это числа: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84. Среди них 7 чисел, которые делятся на 8. Трехзначное число с последними двумя цифрами, образующими число, делящееся на 8, будет делиться на 8, если первая цифра этого числа является четным числом. Действительно, $100n + 8k = 8m, 25n = 2(m - k), m, n, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{2, 4, 6, 8\}$. Таким образом, с помощью двузначных чисел, делящихся на 8 с указанными условиями, можно получить 18 трехзначных, делящихся на 8. Оставшиеся 7 чисел делятся на 4, но не делятся на 8, т.е. их можно представить в виде $4(2k + 1), k = 1, 3, 4, 6, 8, 9, 10$. Тогда $100n + 4(2k + 1) = 8m, 25n + 2k + 1 = 2m, m, n, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{1, 3, 5, 7\}$. Таким образом, получаем еще 24 трехзначных чисел, делящихся на 8. В сумме имеем всего 42 трехзначных натуральных чисел, составленных из неповторяющихся цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и делящихся на 8.

Первые две цифры пятизначного числа можно выбирать любыми из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 с учетом их различия и различия с выбранными тремя последними, т.е. будем иметь $5 \cdot 4$ способов. Количество всех способов выбрать натуральное пятизначное число с неповторяющимися цифрами, составленное из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, равно $A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Искомая вероятность равна $P = \frac{42 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{8}$. **Ответ:** $\frac{1}{8}$.

3. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \frac{|x-0,5|+|y|-a}{\sqrt{3}y-x} = 0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение. Укажите количество различных решений этой системы при каждом найденном значении параметра a . (12 баллов)

Решение.

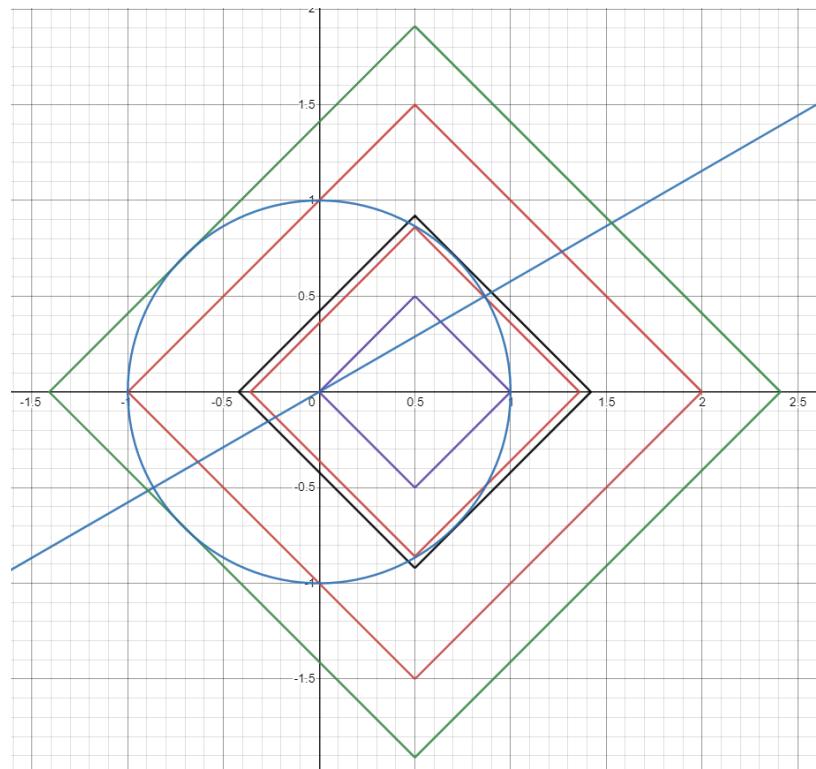
Имеем систему:

$$\begin{cases} |x - 0,5| + |y| = a, \\ \sqrt{3}y - x \neq 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Отметим,

что $a > 0$. Точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ с прямой $\sqrt{3}y - x = 0$ имеют координаты $(\pm\sqrt{3}/2; \pm 1/2)$.

Найдем значение параметра a , при котором квадрат $|x - 0,5| + |y| = a$ проходит через точку $(1; 0)$. Имеем $a = 0,5$. При этом система имеет одно решение. При $a < 0,5$ решений нет. Учтем, что графики окружности и квадрата симметричны относительно оси абсцисс. Найдем значение параметра a , при котором квадрат $|x - 0,5| + |y| = a$ проходит через точку $(1/2; \sqrt{3}/2)$. Имеем $a = \sqrt{3}/2$.



При этом a квадрат, окружность и прямая $\sqrt{3}y - x = 0$ пересекаются в точке $(\sqrt{3}/2; 1/2)$, и система имеет три решения. При $0,5 < a < \sqrt{3}/2$ система имеет два решения.

Найдем значение параметра a , при котором сторона квадрата, лежащая на прямой $x + y = a + 0,5$ касается окружности. Точка касания лежит на прямой $y = x$, и $a + 0,5 = \sqrt{2}$. Тогда при $\sqrt{3}/2 < a < \sqrt{2} - 0,5$ система будет иметь шесть решений. При $a = \sqrt{2} - 0,5$ система имеет четыре решения.

Найдем значение параметра a , при котором квадрат $|x - 0,5| + |y| = a$ проходит через точку $(0; 1)$. Имеем $a = 1,5$. При $\sqrt{2} - 0,5 < a < 1,5$ система имеет два решения. При $a = 1,5$ система имеет три решения. Найдем значение параметра a , при котором сторона квадрата, лежащая на прямой $y - x = a - 0,5$ касается окружности. Точка касания лежит на прямой $y = -x$, и $a - 0,5 = \sqrt{2}$. Тогда при $1,5 < a < \sqrt{2} + 0,5$ система будет иметь четыре решения, за исключением случая пересечения квадрата, окружности и прямой $\sqrt{3}y - x = 0$ в точке $(-\sqrt{3}/2; -1/2)$, т.е. при $a = \sqrt{3}/2 + 1$. При $a = \sqrt{3}/2 + 1$ система имеет три решения. При $a = \sqrt{2} + 0,5$ система имеет два решения. При $a > \sqrt{2} + 0,5$ система решений не имеет.

Ответ: система имеет хотя бы одно решение при $a \in [0,5; \sqrt{2} + 0,5]$,

при $a = 0,5$ система имеет 1 решение,

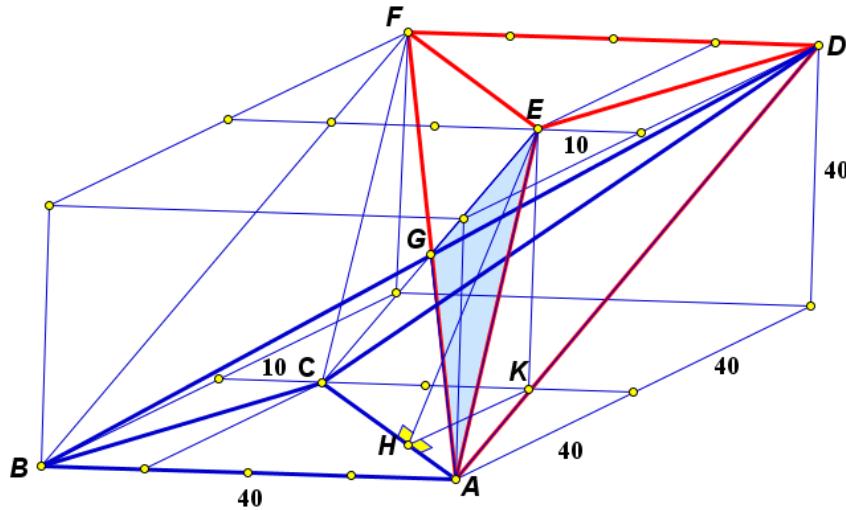
при $a \in (0,5; \sqrt{3}/2) \cup (\sqrt{2} - 0,5; 1,5) \cup \{\sqrt{2} + 0,5\}$ система имеет 2 решения,

при $a \in (\sqrt{3}/2; \sqrt{2} - 0,5)$ система имеет 6 решений,

при $a = \sqrt{3}/2, a = 1,5$, и $a = \sqrt{3}/2 + 1$ система имеет 3 решения,

при $a = \sqrt{2} - 0,5$ система имеет 4 решения.

46. Найдите площадь треугольника AGE , где G – точка пересечения BD и AF (см. условие задачи 4а). (8 баллов)



Решение.

Прямые AC и EF параллельны, $ACFE$ – параллелограмм, точка G – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ACFE$. Площадь треугольника AGE равна четверти площади параллелограмма $ACFE$.

Имеем $AC = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$. EK – перпендикуляр, опущенный из точки E на плоскость ABC . KH – перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую AC . Согласно теореме о трех перпендикулярах, EH – высота параллелограмма $ACFE$.

$$KH = \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 40}{50} = 16, EH = \sqrt{EK^2 + KH^2} = \sqrt{40^2 + 16^2} = 8\sqrt{29},$$

$$S_{ACFE} = AC \cdot EH = 400\sqrt{29}, \quad S_{AGE} = 100\sqrt{29}.$$

Ответ: $50\sqrt{17}$.