Профиль: компьютерное моделирование и графика; тур по математике и инженерной графике

Вариант: 1 Класс: 10

Задача 1 (10 *баллов*). Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби $3/41$.

Задача 2 (10 *баллов*). Даны вершины правильного 100-угольника A_1, $A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? Ответ обосновать.

Задача 3 (12 *баллов*). Укажите все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} x-4=a(y^3-2), \\ \frac{2x}{|y^3|+y^3}=\sqrt{x} \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a.

Задача 4а (10 *баллов*). См. на обороте листа.

Задача 4б (8 *баллов*). Найдите площадь фигуры общей для обеих пирамид $ABCE$ и $DEFA$ (см. условие задачи 4а).

Задача 5 (20 *баллов*). См. лист 2.

Задача 4а.

Даны две проекции треугольника ABC и горизонтальная проекция треугольника DEF. Плоскость треугольника DEF параллельна плоскости треугольника ABC и выше ее на на 20 мм.

Требуется:

1) построить фронтальную и горизонтальную проекции двух пирамид ABCE и DEFA с соблюдением проекционной связи;

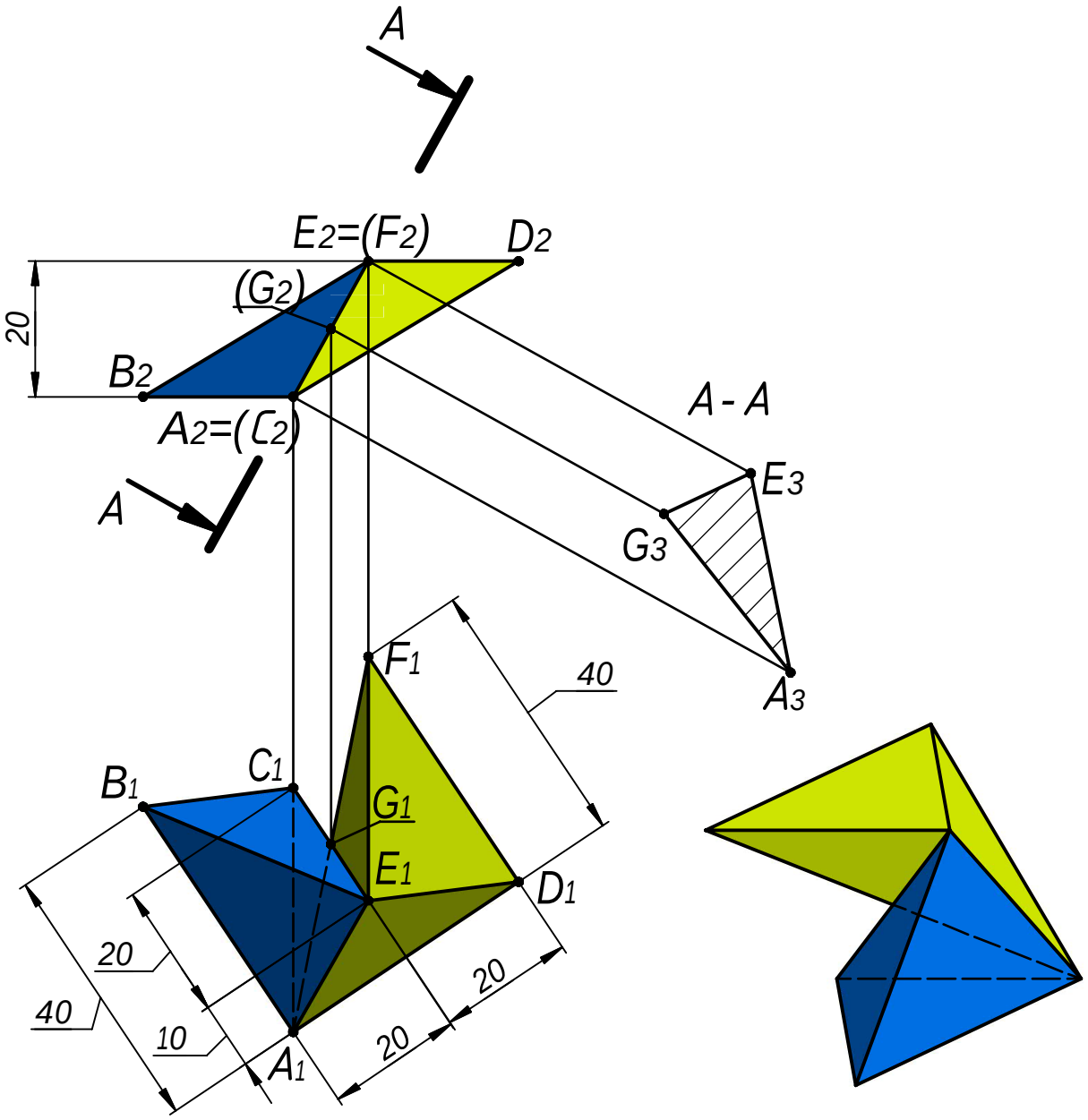
2) построить проекции фигуры, общей для обеих пирамид;

3) определить натуральную величину искомой фигуры с помощью графических построений;

4) обозначить видимость ребер пирамид;

5) оформить все изображения по ГОСТ 2.303-306;

6) обозначить и сохранить на чертеже линии построения натуральной величины фигуры, общей для обеих пирамид.

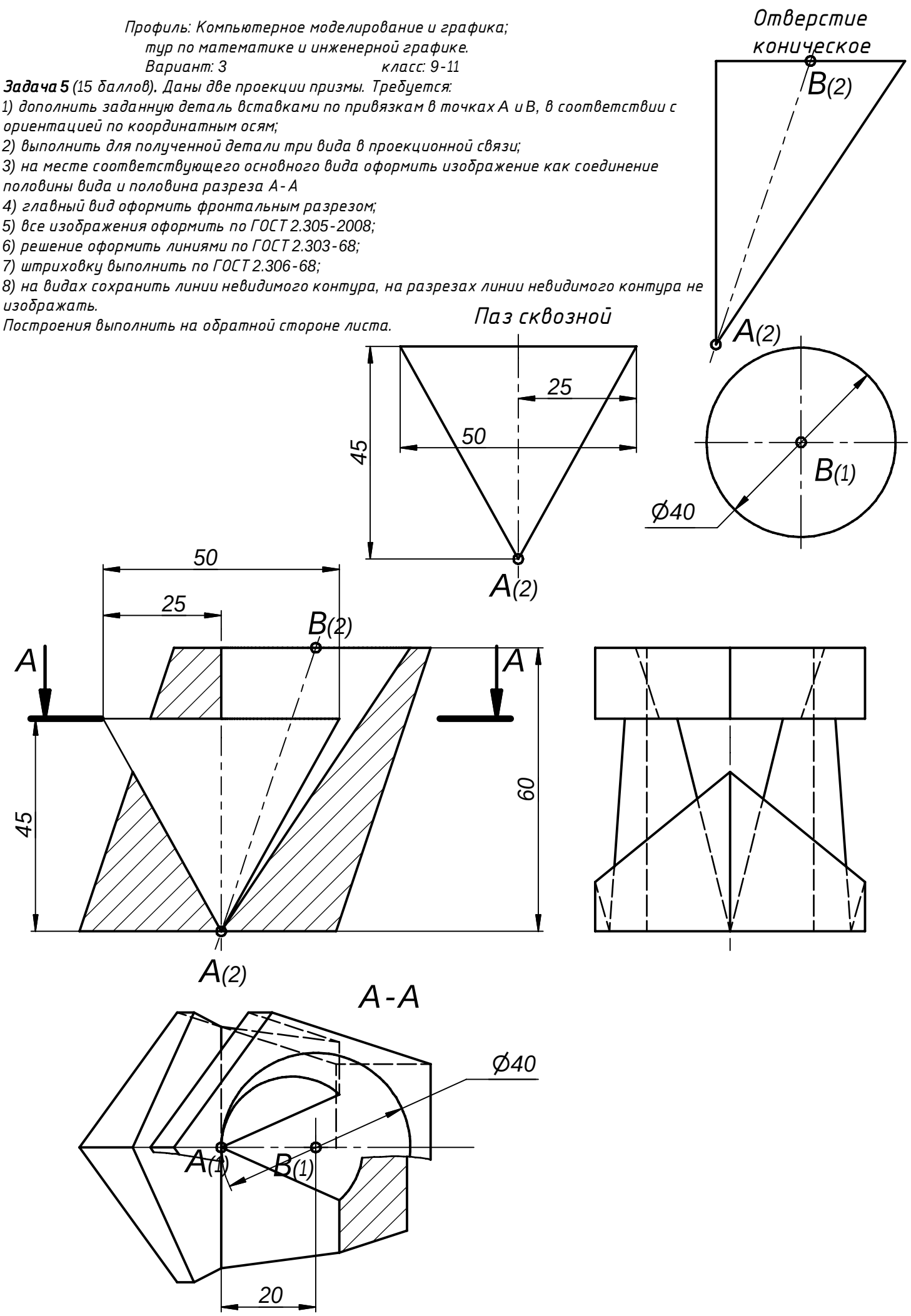


Профиль: Компьютерное моделирование и графика;
тур по математике и инженерной графике.
Вариант: 3 класс: 9-11

Задача 5 (15 баллов). Даны две проекции призмы. Требуется:

1) дополнить заданную деталь вставками по привязкам в точках А и В, в соответствии с ориентацией по координатным осям;
2) выполнить для полученной детали три вида в проекционной связи;
3) на месте соответствующего основного вида оформить изображение как соединение половины вида и половина разреза А-А
4) главный вид оформить фронтальным разрезом;
5) все изображения оформить по ГОСТ 2.305-2008;
6) решение оформить линиями по ГОСТ 2.303-68;
7) штриховку выполнить по ГОСТ 2.306-68;
8) на видах сохранить линии невидимого контура, на разрезах линии невидимого контура не изображать.

Построения выполнить на обратной стороне листа.



Решение варианта №1 (Математика - 10 класс)

1. Найдите миллионную цифру после запятой в десятичной записи дроби $3/41$.
(10 баллов)

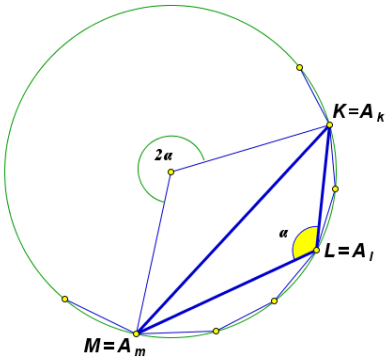
Решение. Наименьшее целое число из девяток в десятичной форме записи, делящееся на 41, это 99999, $99999 = 41 \cdot 2439$. Тогда

$\frac{1}{41} = \frac{3 \cdot 2439}{99999} = \frac{7317}{10^5-1} = \frac{7317}{10^5} \cdot \frac{1}{1-10^{-5}} = 7317 \cdot 10^{-5}(1 + 10^{-5} + 10^{-10} + 10^{-15} + \cdots) =$
0,073170731707317 ... Искомая цифра последняя в 200000-м периоде. Это цифра 7.

Ответ: 7.

2. Даны вершины правильного 100-угольника $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Сколькими способами из них можно выбрать три вершины, образующие тупоугольный треугольник? (10 баллов)

Решение. Пусть вершины занумерованы по часовой стрелке.



Обозначим выбранные вершины по часовой стрелке K, L, M, причем угол KLM тупой. Если $K = A_k, L = A_l, M = A_m$, то

$\alpha = \angle KLM = \frac{180°}{100}\big(100 - (m-k)\big) > 90°,\ 0 < m - k < 50.$

Разность $m - k$ считается по модулю 100

(например, $15 - 70|_{mod100} = 45$).

Посчитаем число способов выбрать вершины K, L, M.

Сначала одним из 100 способов выберем вершину K. Затем выберем любые две из вершин $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{k+49}$ (номера точек считаются по модулю 100). Из этих вершин ближняя к K будет L, дальняя – M. Итак, имеем $100 \cdot C_{49}^2 = 100 \cdot 49 \cdot 24 = 117600$.

Ответ: 117600.

3. Укажите все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} x - 4 = a(y^3 - 2), \\ \frac{2x}{|y^3| + y^3} = \sqrt{x} \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (12 баллов)

Решение. ОДЗ: $y > 0, x \geq 0$.

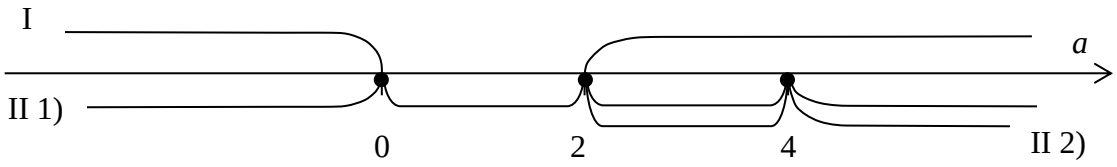
В ОДЗ второе уравнение системы принимает вид: $x = y^3\sqrt{x}$.

I. $x = 0, y = \sqrt[3]{2 - \frac{4}{a}} = \sqrt[3]{\frac{2a-4}{a}} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0, \\ a > 2. \end{array}\right.$

II. $x > 0, y^3 = \sqrt{x}; \big(\sqrt{x} - 2\big)\big(\sqrt{x} + 2\big) = a\big(\sqrt{x} - 2\big).$

1) $\sqrt{x} = 2, x = 4, y = \sqrt[3]{2}, a \in R.$

2) $\sqrt{x} + 2 = a, \sqrt{x} = a - 2 > 0, a > 2$. Найденное решение $x = (a-2)^2, y = \sqrt[3]{a-2}$ совпадает с предыдущим, если $2 = a - 2, a = 4$. Итак, при $a \in (2; 4) \cup (4; +\infty) x = (a-2)^2, y = \sqrt[3]{a-2}$.

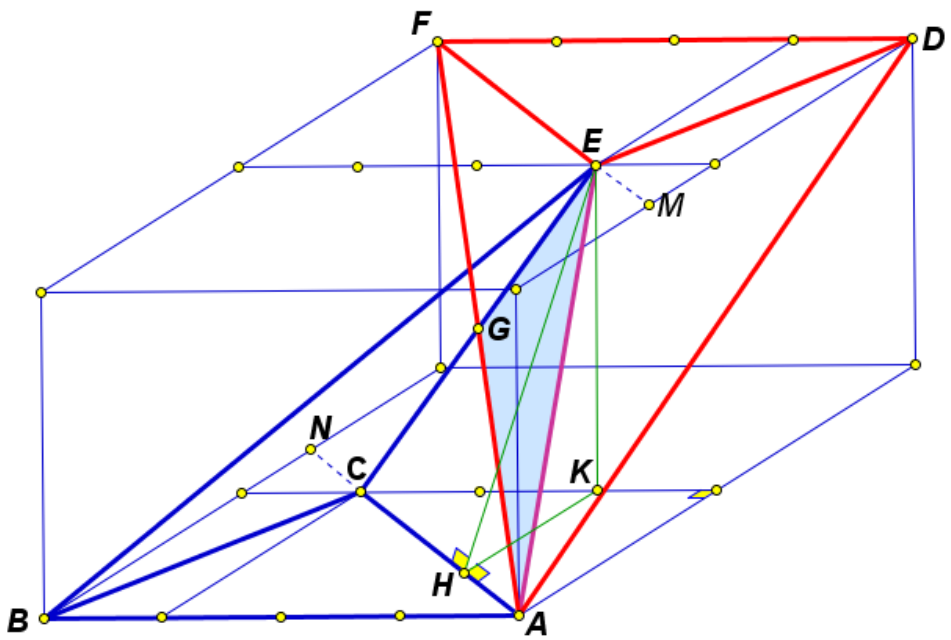


Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}, x_1 = 0, y_1 = \sqrt[3]{2 - \frac{4}{a}}; x_2 = 4, y_2 = \sqrt[3]{2};$

$a \in [0; 2], x = 4, y = \sqrt[3]{2};$

$a \in (2; 4) \cup (4; +\infty), x_1 = 0, y_1 = \sqrt[3]{2 - \frac{4}{a}}; x_2 = 4, y_2 = \sqrt[3]{2}; x_3 = (a-2)^2, y_3 = \sqrt[3]{a-2}.$

4б. Найдите площадь фигуры общей для обеих пирамид (см. условие задачи 4а). (8 баллов)
Решение.



Прямые *AC* и *EF* параллельны, *ACFE* – параллелограмм, фигура общая для обеих пирамид – треугольник *AGE*, точка *G* – точка пересечения диагоналей параллелограмма *ACFE*. Площадь треугольника *AGE* равна четверти площади параллелограмма *ACFE*.

Имеем $AC = \sqrt{20^2 + 30^2} = 10\sqrt{13}$. *EK* – перпендикуляр, опущенный из точки *E* на плоскость *ABC*. *KH* – перпендикуляр, опущенный из точки *K* на прямую *AC*. Согласно теореме о трех перпендикулярах, *EH* – высота параллелограмма *ACFE*.

$$KH = \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 20}{10\sqrt{13}} = \frac{40}{\sqrt{13}}, EH = \sqrt{EK^2 + KH^2} = \sqrt{20^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{13}}\right)^2} = 20\sqrt{\frac{17}{13}},$$

$$S_{ACFE} = AC \cdot EH = 200\sqrt{17}, \qquad S_{AGE} = 50\sqrt{17}.$$

Ответ: $\mathbf{50\sqrt{17}}$.