№ 1.

$a_n - 2022a_{n+1} + 2021a_{n+2} \geq 0 \quad (n = 1, \dots, 98)$

$a_{99} - 2022a_{100} + 2021a_1 \geq 0$

$a_{100} - 2022a_1 + 2021a_2 \geq 0$

Сложим все ур-ния, кроме $a_{100} - 2022a_1 + 2021a_2 \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{99} a_n - 2022\sum_{i=2}^{100} a_n + 2021\sum_{i=1}^{100} a_n - 2021a_2 \geq 0$$

$$a_1 + a_2 - 2022(a_2 + a_{100}) + 2021(a_1 + a_{100}) \geq 0$$

$$-a_{100} + 2022a_1 - 2021a_2 \geq 0$$

но

$$a_{100} - 2022a_1 + 2021a_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ ед. реш. это $a_{100} + 2021a_2 - 2022a_1 = 0$

Аналогично для всех ур получим:

$a_n - 2022a_{n+1} + 2021a_{n+2} = 0 \quad n = 1, \dots, 98$

$a_{99} - 2022a_{100} + 2021a_1 = 0$

Если подст. $\forall n = 1, \dots, 100 \quad a_n = 10$, то все равенства и нер-ва выполн.

Значит, $a_{22} = 10$ - как минимум одно из реш.

№2

Число ⋮ 8 оканч. на 3-х значное число, кот. ⋮ 8.

Всего 5 вар. для самой посл. цифры: 0,2,4,6,8.

Каждое след. число, оканч на 0 и ⋮ 8 на $5 \cdot 8 = 40$ больше предыд. числа, оканч на 0 и ⋮ 8.

Аналогично для ост. вариантов послед. цифры

Т.к. 0 не подх. по усл., остаются 2, 4, 6, 8

Рассм. 3 послед. цифры (из условия следует, что число из 3 послед. цифр > 123 и < 876)

~~1) **8~~

1) $\overline{ab8}$ ⋮ 8

128,	168,	~~208~~,	248,	~~288~~
328	368	~~408~~	~~448~~	~~488~~
528	568	~~608~~	648	~~688~~
728	768	~~808~~	~~848~~	

10 шт

2) $\overline{ab2}$ ⋮ 8

152	~~192~~	~~232~~	~~272~~	312
352	~~392~~	432	472	512
~~552~~	~~592~~	632	672	712
752	~~792~~	832	872	

12 шт.

3) $\overline{ab4}$ ⋮ 8

~~144~~	184	~~224~~	264	~~304~~
~~344~~	384	~~424~~	~~464~~	~~504~~
~~544~~	584	624	~~664~~	~~704~~
~~744~~	784	824	864	

8 шт.

4) $\overline{ab6} \vdots 8$

136	176	216	256	~~296~~
~~336~~	376	416	456	~~496~~
536	576	~~616~~	~~656~~	~~696~~
736	~~776~~	816	856	

} 12 шт

(вычеркивали числа, содерж. повт. цифры, или числа, содер. 0 или 9)

кол-во сп. составить 5-зн. число из неповт. цифр 1, ..., 8 : $\frac{8!}{3!}$

кол-во сп. выбрать 1 и 2 цифру 5-зн. числа, если 3 из 8 цифр заняты для 4, 5, 6 ~~числа~~ цифры :

$(8-3)\cdot(8-4) = 5\cdot 4 = \frac{(8-3)!}{3!}$ ← кол-во чисел, $\vdots 8$ и уд. усл. задачи

Искомая вероятность:

$$\frac{(\overset{42}{10+12+8+12})\cdot\frac{(8-3)!}{3!}}{\frac{8!}{3!}} = \frac{42\cdot 5!}{8!} = \frac{42}{8\cdot 7\cdot 6} = \frac{1}{8}$$

Ответ: $\frac{1}{8}$

№3

$$\frac{|\cos t - 0{,}5| - |\sin t| - a}{\sqrt{3}\sin t - \cos t} = 0$$

$\geqslant 1$ реш. на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

1) $\sqrt{3}\sin t - \cos t = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t\right) =$
$= 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin t - \cos\frac{\pi}{3}\cos t\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)\right) -$
$- 2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$

$-2\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right) \neq 0$; $\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right) \neq 0$

при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $\cancel{\cos}\left(\frac{\pi}{3} + t\right) \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$

Значит, $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right) \neq 0 \\ t \in \left[0. \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ выполн. при $\frac{\pi}{3} + t \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \neq \frac{\pi}{6}$

2) $\left|\cos t - \overset{0{,}5}{\cancel{\cos\frac{\pi}{3}}}\right| - |\sin t| - a = 0$

при $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin t \geq 0$ всегда

$$\left[\begin{array}{l} \cos t - \overset{0{,}5}{\cancel{\cos\frac{\pi}{3}}} = a + \sin t \\ \cos t - \overset{0{,}5}{\cancel{\cos\frac{\pi}{3}}} = -a - \sin t \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos t - \sin t = a + 0{,}5 \\ \cos t + \sin t = 0{,}5 - a \end{array}\right.$$

$\cancel{\sqrt{2}\sin t}$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right) = a+0{,}5 \\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) = 0{,}5-a \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right) = \dfrac{a+0{,}5}{\sqrt{2}} & (а) \\ \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) = \dfrac{0{,}5-a}{\sqrt{2}} & (б) \end{array}\right.$$

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right) \in \left[\cos\frac{\pi}{4};\ \cos\frac{3\pi}{4}\right]$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right) \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{a+0{,}5}{\sqrt{2}} \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff 1 \geq a+0{,}5 \geq -1$

$0{,}5 \geq a \geq -1{,}5$

меняется от ... до

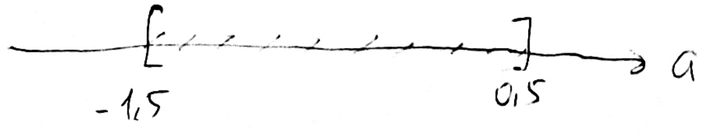
б) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)$ $\cancel{\in}$ $\sin\frac{\pi}{4};\ \sin\frac{3\pi}{4}$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

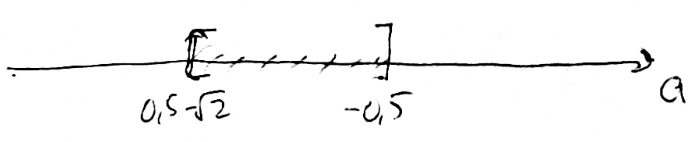
$\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right]$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{0{,}5-a}{\sqrt{2}} \leq 1 \iff 1 \leq 0{,}5-a \leq \sqrt{2}$

$1-0{,}5 \leq -a \leq \sqrt{2}-0{,}5$

$-0{,}5 \geq a \geq 0{,}5-\sqrt{2}$

а) 

б) 

3) Подставим $t = \frac{\pi}{6}$ (см. 1))

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

↑ лежит в 1-й четв.

$\cancel{\frac{a+0,5}{\sqrt{2}} \neq \arccos \frac{5\pi}{12}}$ $\quad \frac{5\pi}{12}$ в 1 четв. $\Rightarrow$

$\sin\frac{5\pi}{12}$ и $\cos\frac{5\pi}{12} > 0$

$\cancel{\sin^2 5}$

$\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}$; $\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}$; $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

б) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \neq \frac{a+0,5}{\sqrt{2}}$; $\quad \sqrt{2-\sqrt{3}} \neq (a+0,5)\sqrt{2}$

$\cancel{a \neq 0,5 - \sqrt{...}}$

$a \neq 0,5 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ $\approx 0,1$

а) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \neq \frac{a+0,5}{\sqrt{2}}$; $\quad \sqrt{2+\sqrt{3}} \neq (a+0,5)\sqrt{2}$

$a \neq \underbrace{-0,5 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}}_{\approx 0,9}$

не равны

$\setminus \left\{0,5 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\right\}$

При $a \in [-1,5; 0,5]$ ≥ 1 реш. при $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

При $a \in [-1,5; 0,5-\sqrt{2})$ 1 реш.

$a \in [0,5-\sqrt{2}; -0,5\cancel{+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}}]$ 2 реш.

$\cancel{a = 0,5 - \sqrt{2...}}$

$a \in \left[-0,5; 0,5 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\right)$ 1 реш.

$a = 0,5 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ 0 реш. | $a \in \left(0,5 - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}; 0,5\right]$ 1 реш.