Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2020 г.

9 класс

Вариант 2

1. Вася загадал два натуральных числа. Сумма утроенного квадрата первого числа и учетверенного произведения первого и второго числа на 13 больше квадрата второго числа, умноженного на 7. Найдите эти числа, в ответе запишите сумму этих чисел.

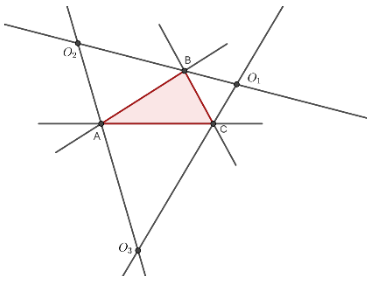
2. Найдите сумму всех целых значений s, при которых уравнение
$$11|q+1|-4q=\big||q-s|+2q\big|$$
относительно q не имеет ни одного корня.

3. Мальчик написал на листе бумаги первые двадцать натуральных чисел. Ему не понравилось, как написано одно из них, и он зачеркнул это число. Оказалось, что среди 19 оставшихся есть число, равное среднему арифметическому этих 19 чисел. Какое число он зачеркнул? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ сумму этих чисел.

4. Два велогонщика стартовали одновременно с общего начала велопробега, один со скоростью 40 км/ч, другой со скоростью 30 км/ч. Через полчаса с того же места по трассе велопробега вслед за ними выехал мотоциклист. Найдите скорость мотоциклиста (в км/ч), если известно, что он догнал первого гонщика на 1 час 15 минут позже, чем второго.

5. В коробке лежат носки семи цветов. Если взять из коробки 25 носков, то среди них гарантированно окажутся все имеющиеся цвета. Чему равно наибольшее число носков, которое может быть в коробке?

6. Дан треугольник $ABC.$ Прямые $O_1O_2,\ O_1O_3, O_3O_2$ - биссектрисы внешних углов треугольника $ABC,$ как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O_2 и OO_3.



7. Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой BC и AE равны 5 и 7, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC. На AB отмечена точка F так, что BF:FA=2:3, на AC отмечена точка G так, что AG:GC=4:1; на AE отмечена точка D так, что AD:DE=5:2. Определите градусную меру угла DFG.

8. В треугольнике ABC с углом $\angle B=120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке M. Найти градусную меру угла B_1BM .

9. Студенты-химики Иванов и Петров взяли две бутыли с растворами, имеющими различное процентное содержание спирта. Массы жидкостей 3,2 и 4,8 кг. Затем они отлили из бутылей по одинаковому количеству раствора, после чего жидкость, отлитую из бутыли Петрова, перелили к Иванову и наоборот. В результате процентное содержание спирта в обоих бутылях стало одинаковым. Определить сколько граммов раствора переливалось каждым студентом.

Решение варианта 2

1. Вася загадал два натуральных числа. Сумма утроенного квадрата первого числа и учетверенного произведения первого и второго числа на 13 больше квадрата второго числа, умноженного на 7. Найдите эти числа, в ответе запишите сумму этих чисел.

Решение.
Пусть x – первое число, y - второе число. Получим уравнение:
$3x^2 + 4xy = 7y^2 + 13$,
$3x^2 - 3xy + 7xy - 7y^2 = 13$,
$(x - y)(3x + 7y) = 13$,

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = 13 \\ 3x + 7y = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 7y = -13 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = -13 \\ 3x + 7y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 9{,}2 \\ y = -3{,}8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -9{,}2 \\ y = 3{,}8 \end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяют x=2 и y=1, сумма равна 3.
Ответ: 3.

2. Найдите сумму всех целых значений s, при которых уравнение

$$11|q + 1| - 4q = \big||q - s| + 2q\big|$$

относительно q не имеет ни одного корня.

Решение.
Рассмотрим функцию $f(q) = 11|q + 1| - 4q - \big||q - s| + 2q\big|$. Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при q (11>4+1+2). Отсюда следует, что на всех интервалах до $q = -1$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $q = -1$ - положителен, $q = -1$ - точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(q) = 0$ не имело ни одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(-1) > 0$. Решим неравенство. Обозначим $|q + 1| = t$, получим:
$4-|t - 2| > 0$, $(t - 2)^2 - 4^2 < 0$,
$(t - 6)(t + 2) < 0$, $t \in (-2; 6)$, $|q + 1| < 6$, $q \in (-7; 5)$,
сумма целых значений q: -11.
Ответ: -11.

3. Мальчик написал на листе бумаги первые двадцать натуральных чисел. Ему не понравилось, как написано одно из них, и он зачеркнул это число. Оказалось, что среди 19 оставшихся есть число, равное среднему арифметическому этих 19 чисел. Какое число он зачеркнул? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ сумму этих чисел.

Решение.
Сумма чисел на листе, первоначально равная 1+2+3+…+20=210 и уменьшившаяся на зачеркнутое число, заключена в пределах от 210-20=190 до 210-1=209. Она, кроме того, кратна 19, поскольку в 19 раз больше одного из слагаемых. А так, как из чисел 190, 191, 192, … , 209 только числа 190 и 209 кратны 19, то стёрли либо число 20=210-190, либо 1= 210-209. В обоих случаях среднее арифметическое чисел, оставшихся на листе, не совпадает со стёртым числом.
Ответ: 21.

4. Два велогонщика стартовали одновременно с общего начала велопробега, один со скоростью 40 км/ч, другой со скоростью 30 км/ч. Через полчаса с того же места по трассе велопробега вслед за ними выехал мотоциклист. Найдите скорость мотоциклиста (в км/ч), если известно, что он догнал первого гонщика на 1 час 15 минут позже, чем второго.

Решение.
Обозначим: v – скорость мотоциклиста, t_1, t_2 – время, через которое мотоциклист нагнал соответственно первого и второго велогонщиков. По условию $vt_1 - 40t_1 = 20$ и $vt_2 - 30t_2 = 15$. Выразим из уравнений t_1, t_2 и приравняв их разность к 1,25 часа, получим уравнение

$$\frac{20}{v-40} - \frac{15}{v-30} = \frac{5}{4},$$

которое преобразуется к квадратному уравнению

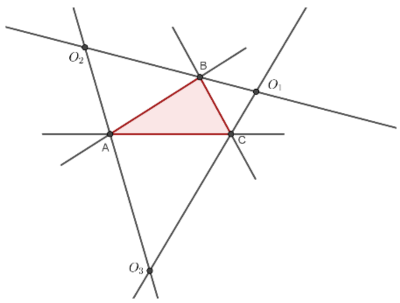
$$v^2 - 74v + 1200 = 0,$$

$v_1 = 50$ км/ч, $v_2 = 24$ км/ч – не подходит $(24 < 30)$ по условию задачи.
Ответ: 50.

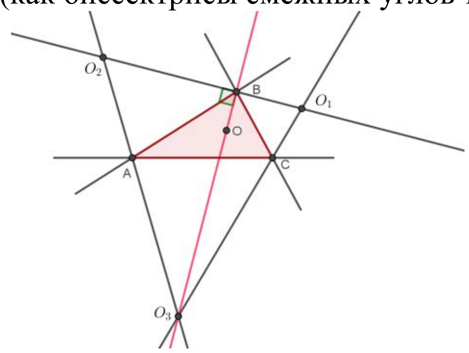
5. В коробке лежат носки семи цветов. Если взять из коробки 25 носков, то среди них гарантированно окажутся все имеющиеся цвета. Чему равно наибольшее число носков, которое может быть в коробке?

Решение.
Пусть в коробке лежат n носков, тогда, по принципу Дирихле, носков какого-то цвета не больше $\frac{n}{7}$, следовательно, остальных - не меньше $\frac{6n}{7}$, причём их должно быть меньше 25 (по условию). Получаем $\frac{6n}{7} < 25, n < \frac{175}{6}, n \leq 29$.
Число 29 не подходит, потому что тогда в коробке будут носки одного цвета в количестве не более 4 штук, а носков остальных цветов – не менее 25, что противоречит условию. Для следующего числа 28 существует ситуация (для каждого из 7 цветов – 4 носка), удовлетворяющая условию задачи.
Ответ:28.

6. Дан треугольник ABC. Прямые O_1O_2, O_1O_3, O_3O_2 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O_2 и OO_3.



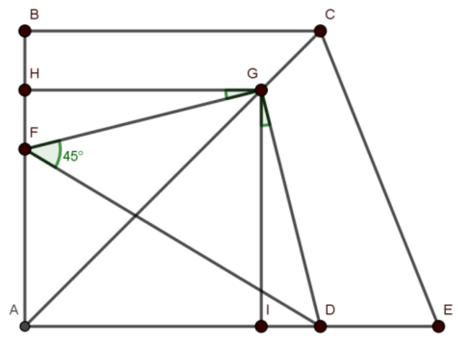
Решение.
Точка O - точка пересечения биссектрис треугольника ABC, следовательно, биссектриса BO перпендикулярна прямой O_1O_2 (как биссектрисы смежных углов треугольника).



Точка O_3, как равноудаленная от прямых BA и BC, лежит на BO. Следовательно, прямая OO_3, совпадающая с BO, перпендикулярна прямой O_1O_2.
Ответ: 90.

7. Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой BC и AE равны 5 и 7, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC. На AB отмечена точка F так, что BF:FA=2:3, на AC отмечена точка G так, что AG:GC=4:1; на AE отмечена точка D так, что AD:DE=5:2. Определите градусную меру угла DFG.

Решение.
Построим перпендикуляры GI и GH.



1) $\Delta GID = \Delta GFH$ - по двум катетам, так как $GI = GH = 4;\ FH = ID = 1,$ поэтому $FG = GD,$ $\angle FGH = \angle DGI = \alpha$.

2) $GIAH$ - квадрат, значит $\angle IGH = 90^0,\ \angle IGH = \angle FGH + \angle IGF = \alpha + \angle IGF.$

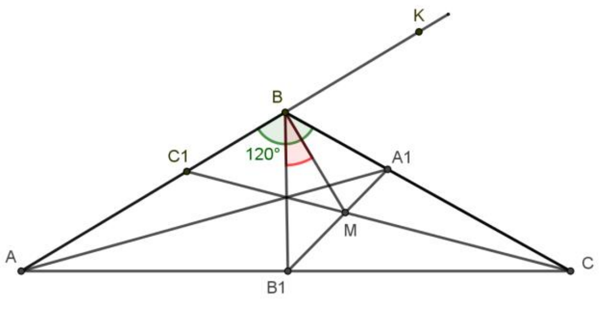
3) $\angle DGF = \angle DGI + \angle IGF = \alpha + \angle IGF = 90^0.$

4) ΔDFG - прямоугольный равнобедренный треугольник, так как $FG = GD,$ и значит $\angle DFG = 45^0.$

Ответ: 45.

8. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке М. Найти градусную меру угла B_1BM.

Решение.



Продолжим сторону AB за точку $B,$ тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK. Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Таким образом, B_1A_1 - биссектриса $\angle BB_1C.$

В треугольнике BB_1C точка M - точка пересечения биссектрис B_1A_1 и $CC_1,$ а значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM = \angle MBC = 30^\circ.$

Ответ: 30.

9. Студенты-химики Иванов и Петров взяли две бутыли с растворами, имеющими различное процентное содержание спирта. Массы жидкостей 3,2 и 4,8 кг. Затем они отлили из бутылей по одинаковому количеству раствора, после чего жидкость, отлитую из бутыли Петрова, перелили к Иванову и наоборот. В результате процентное содержание спирта в обоих бутылях стало одинаковым. Определить сколько граммов раствора переливалось каждым студентом.

Решение.

Пусть x - масса переливаемой жидкости, $p\%$ - процентное содержание спирта в первом растворе, $q\%$ - процентное содержание спирта во втором растворе. Тогда у Иванова осталось после отлития $3,2-x$ кг раствора, а в нем $(3,2-x)\cdot\frac{p}{100}$ спирта, ему перелили x кг раствора, а в нем $x\cdot\frac{q}{100}$ спирта. Процентное содержание спирта в первом растворе после переливаний:

$$\frac{(3,2-x)\cdot\frac{p}{100}+x\cdot\frac{q}{100}}{3,2}\cdot 100.$$

У Петрова осталось после отлития $4,8-x$ кг раствора, а в нем $(4,8-x)\cdot\frac{q}{100}$ спирта, ему перелили x кг раствора, а в нем $x\cdot\frac{p}{100}$ спирта. Процентное содержание спирта во втором растворе после переливаний:

$$\frac{(4,8-x)\cdot\frac{q}{100}+x\cdot\frac{p}{100}}{4,8}\cdot 100.$$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{(3,2-x)\cdot\frac{p}{100}+x\cdot\frac{q}{100}}{3,2}\cdot 100=\frac{(4,8-x)\cdot\frac{q}{100}+x\cdot\frac{p}{100}}{4,8}\cdot 100$$

$$\left((3,2-x)\cdot\frac{p}{100}+x\cdot\frac{q}{100}\right)\cdot 3=\left((4,8-x)\cdot\frac{q}{100}+x\cdot\frac{p}{100}\right)\cdot 2$$

$$\left((3,2-x)\cdot p+x\cdot q\right)\cdot 3=\left((4,8-x)\cdot q+x\cdot p\right)\cdot 2$$

$$(3,2p-xp+xq)\cdot 3=(4,8q-xq+xp)\cdot 2$$

$$9,6p-3xp+3xq=9,6q-2xq+2xp$$

$$9,6(p-q)=5x(p-q)$$

$$x=\frac{9,6}{5}=1,92 \text{ (кг)}$$

Ответ: 1920.