Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2020 г.

9 класс

Вариант 1

№1. В лотерейном билете 8 клеточек. В каждую можно поставить любое число от 1 до 8. Клеточка считается заполненной успешно, если ваше число совпало с числом, стоящем на этом месте в выигрышном номере (он единственный и фиксированный, вы его не знаете). Сколько есть способов заполнить лотерейный билет так, чтобы ровно 3 клеточки из 8 были заполнены успешно?

№2. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе средней цены P (в р.за штуку). Показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Рейтинг R вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - kP$, где k – некоторый коэффициент. В таблице даны цены и показатели четырех моделей мясорубок.

Модель мясорубки	Цена мясорубки (р.за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4400	0	4	4
Б	6300	1	4	3
В	5500	2	4	3
Г	5300	4	4	1

Определите наименьшее значение k, при котором рейтинг модели Б будет не больше рейтинга модели Г.

№3. Одна из сторон треугольника равна 34, а косинусы углов, прилежащих к этой стороне, равны $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите периметр треугольника.

№4. Найдите последнюю цифру числа 20793^{39633}.

№5. Имеется три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением содержания меди и никеля 4:1. Найдите массу третьего куска, если масса первого из них в два раза больше массы второго.

№6. В равностороннем треугольнике ABC сторона равна 6. Точка K принадлежит отрезку AB и AK:KB=2:1, на продолжении стороны AC за точку A взята точка M такая что KM=KC. Определите длину отрезка AM.

№7. У натурального числа N посчитали произведение всех его натуральных делителей (включая его самого). Оказалось, что максимальная степень двойки, на которую делится полученное число – 2^{178}. Найдите наименьшее N с таким свойством. В ответе укажите четыре последние цифры числа N.

№8. Определите наименьшее значение выражения $x_1{}^2 + x_2{}^2$, если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + (8 - a)x - a - 3 = 0$.

№9. Ваня, долго умножая, вычислил 2020! В числе, полученном Ваней, Ксюша слева направо расставила знаки действий: между первой и второй цифрами знак «-», между второй и третьей цифрами знак «+», между третьей и четвертой – «-», и так далее, до конца. Затем Ваня вычислил результат этих действий. В полученном Ваней числе Ксюша опять расставила между цифрами знаки «-» и «+» по такому же правилу. После этого Ваня опять вычислил результат, и так далее. После некоторого количества таких операций было получено однозначное число. Какое?

Решение варианта 1

№1. В лотерейном билете 8 клеточек. В каждую можно поставить любое число от 1 до 8. Клеточка считается заполненной успешно, если ваше число совпало с числом, стоящем на этом месте в выигрышном номере (он единственный и фиксированный, вы его не знаете). Сколько есть способов заполнить лотерейный билет так, чтобы ровно 3 клеточки из 8 были заполнены успешно?

Решение.
Распределение успешных клеточек может произойти ($C_8^3 = \frac{8*7*6}{3*2*1} = 56$) способами. В каждом из этих случаев три успешных номера будут иметь фиксированные значения, а остальные 5 номеров могут принимать любые значения, кроме правильных, то есть всего будет 7^5 вариантов заполнить оставшиеся клетки нужным образом, для каждого из этих 56-ти распределений успешных клеточек. Получаем ответ $56 * 7^5$

$$7^5 = 16807$$
$$56 * 16807 = 941192$$

Ответ: 941192.

№2. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе средней цены *P* (в р.за штуку). Показателей функциональности *F*, качества *Q* и дизайна *D*. Рейтинг *R* вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - kP$, где *k* – некоторый коэффициент. В таблице даны цены и показатели четырех моделей мясорубок.

Модель мясорубки	Цена мясорубки (р.за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4400	0	4	4
Б	6300	1	4	3
В	5500	2	4	3
Г	5300	4	4	1

Определите наименьшее значение *k*, при котором рейтинг модели Б будет не больше рейтинга модели Г.

Решение.
$R_Б = 4(2 + 8 + 3) - k \cdot 6300 = 52 - 6300k$
$R_Г = 4(8 + 8 + 1) - k \cdot 5300 = 68 - 5300k$
Составим неравенство: $52 - 6300k \le 68 - 5300k$
$$-1000k \le 16$$
$$k \ge -0{,}016$$
Ответ: при *k* = -0,016.

№3. Одна из сторон треугольника равна 34, а косинусы углов, прилежащих к этой стороне, равны $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите периметр треугольника.

Решение:
1) Для решения задачи проведём дополнительное построение: $BD \perp AC$
2) $tg(\angle A) = \frac{BD}{AD} = \frac{\sin(\angle A)}{\cos(\angle A)}$; $\sin(\angle A) = \sqrt{1-\cos^2(\angle A)}$; $\sin(\angle A) = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17}$;
$tg(\angle A) = \frac{8}{17} : \frac{15}{17} = \frac{8}{15}$

3) $tg(\angle C)=\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{\sin(\angle C)}{\cos(\angle C)}$; $\sin(\angle C)=\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{17}\right)^2}=\dfrac{15}{17}$; $tg(\angle C)=\dfrac{15}{17}:\dfrac{8}{17}=\dfrac{15}{8}$

4) $BD=AD\cdot tg(\angle A)$ и $BD=DC\cdot tg(\angle C)$. Значит $AD\cdot\dfrac{8}{15}=DC\cdot\dfrac{15}{8}$.

Так как $DC=AC-AD$, т.е. $DC=34-AD$, то $AD\cdot\dfrac{8}{15}=(34-AD)\cdot\dfrac{15}{8}$. Значит $64AD=(34-AD)\cdot 15^2$; $(64+225)AD=34\cdot 15^2$; $AD=\dfrac{34\cdot 15^2}{289}=\dfrac{2\cdot 15^2}{17}$.

5) $AB=\dfrac{AD}{\cos(\angle A)}$, то есть $AB=\dfrac{2\cdot 15^2}{17}:\dfrac{15}{17}=2\cdot 15=30$.

6) $BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos(\angle A)}$; .

7) $P_{\triangle ABC}=AB+BC+AC=30+16+34=80$

Ответ: 80

№4. Найдите последнюю цифру числа 20793^{39633}.

Решение. Заметим, что последняя цифра произведения натуральных чисел такая же, как последняя цифра произведения последних цифр этих чисел. Пользуясь этим правилом, составим последовательность последних цифр степеней тройки: $3,9,7,1,3,9,7,1,\cdots$ Заметим, что в этой последовательности блоки по четыре цифры 3, 9, 7, 1 повторяются, значит, последняя цифра числа 3^{39633} зависит от того, какой остаток будет давать число 39633 при делении на 4 (так как блоки по 4 цифры). Так как остаток 39633 при делении на 4 равен 1, то 3^{39633} заканчивается на такую же цифру, как и 3^1. Таким образом, последняя цифра числа – это 3.

Ответ: 3

№5. Имеется три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением содержания меди и никеля 4:1. Найдите массу третьего куска, если масса первого из них в два раза больше массы второго.

Решение:

Пусть масса второго куска x кг, тогда масса первого куска $2x$ кг, а масса третьего куска y кг.

	Медь	Никель
1 кусок	$\frac{2}{3}\cdot 2x$	$\frac{1}{3}2x$
2 кусок	$\frac{3}{4}x$	$\frac{1}{4}x$
3 кусок	$\frac{5}{6}y$	$\frac{1}{6}y$

Масса нового сплава $2x+x+y=12$, масса меди и никеля в нём $\dfrac{4}{5}\cdot 12=\dfrac{48}{5}$ и $\dfrac{1}{5}\cdot 12=\dfrac{12}{5}$ соответственно.

Выпишем систему уравнений $\begin{cases} 3x+y=12 \\ \frac{2}{3}\cdot 2x+\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}y=9{,}6 \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}y=2{,}4 \end{cases}$;

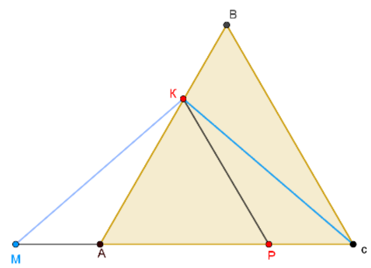
$\begin{cases} 16x+9x+10y=115{,}2 \\ y=12-3x \end{cases}$; $\begin{cases} 25x+10y=115{,}2 \\ y=12-3x \end{cases}$; $25x+120-30x=115{,}2$;

$-5x=-4{,}8$; $x=0{,}96$ масса второго куска, 1,92 – масса первого куска, $y=12-3x=9{,}12$ - масса третьего куска.

Ответ: 9,12 кг.

№6. В равностороннем треугольнике АВС сторона равна 6. Точка К принадлежит отрезку АВ и АК:КВ=2:1, на продолжении стороны АС за точку А взята точка М такая что КМ=КС. Определите длину отрезка АМ.

Решение.



1. Построим точку Р : Р $\in$ АС, АК=АР=4.
2. треугольник АКР равнобедренный, т. к. АК=АР=4, $\angle$А=60° $\Rightarrow$ треугольник АКР равносторонний $\Rightarrow$ КР=АК=АР=4 $\Rightarrow$ РС=2.
3. $\angle$ КАМ=$\angle$КРС=120°,
4. треугольник МКС равнобедренный, т. к. МК=КС по условию.
5. $\angle$ МКА=$\angle$СКР=180°$-\alpha$ -120°,
6. треугольник МКА = треугольнику КРС двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow$ МА=РС=2.

Ответ: 2

№7. У натурального числа N посчитали произведение всех его натуральных делителей (включая его самого). Оказалось, что максимальная степень двойки, на которую делится полученное число – 2^{178}. Найдите наименьшее N с таким свойством. В ответе укажите четыре последние цифры числа N.

Решение:

Пусть в разложение этого числа на простые множители число 2 входит в степени a (очевидно, $a \geq 1$). Кроме того, пусть у этого числа ровно k нечетных делителей ($k \geq 1$, так как всегда есть хотя бы один нечетный делитель – число 1). Тогда каждый их этих k нечетных делителей при умножении на 2^1, 2^2, …, 2^a порождает a четных делителей, причем их произведение будет содержать число 2 в степени $1+2+\ldots+a$ = $a(a+1)/2$ = 178. Решим это уравнение в натуральных числах. Поскольку 178 раскладывается на простые множители как 2*89, одно из чисел k, a, $(a+1)$ кратно 89. Но это не могут быть a или $(a+1)$, так как тогда $a(a+1)/2 \geq 88*89/2 > 178$. Значит, k кратно 89. В таком случае, $a(a+1)/2$ = 1 или 2, то есть $a(a+1)$ = 2 или 4. Возможен только первый случай, при котором a = 1. Тогда k = 178. Итак, любое число N, произведение делителей которого содержит 2 ровно в 178 степени, имеет ровно 178 нечетных делителей и содержит в своем разложении на простые множители число 2 ровно в первой степени. Рассмотрим $N/2$ – нечетное число с ровно k = 178 делителями. Количество делителей натурального числа равно $(x_1+1)*(x_2+1)*\ldots(x_m+1)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – степени простых множителей в его разложении. У числа $N/2$ это выражение равно 178 = 2*89, так что либо $N/2 = p^{177}$, либо $N/2 = p^{88}*q$, где p и q – нечетные простые числа. Итак, любое подходящее N выглядит либо как $N = 2*p^{177}$, либо как $N = 2*p^{88}*q$, и все такие числа подходят. Наименьшее среди них, очевидно, число $2*3^{88}*5 = 10*9^{44}=10*(10-1)^{44}$. По биному Ньютона: последние три цифры числа $(10-1)^{44}$ – это последние три цифры числа $C_{44}^2 * 10^2 * 1^{42} - C_{44}^1 * 10^1 * 1^{43} + C_{44}^0 * 10^0 * 1^{44}$ (если степень 10 больше 2, то последние три цифры в числе равны 0 и не меняют последние три цифры суммы)= 22*43*100 - 44*10 + 1 = 94161, то есть 161

Ответ: 1610.

№8. Определите наименьшее значение выражения $x_1{}^2 + x_2{}^2$, если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + (8-a)x - a - 3 = 0$.

Решение. $D=(a-8)^2+4(a+3)=a^2-12a+76.$ $D \succ 0$ для любых a, значит всегда имеет два корня. По теореме Виета получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 8, \\ x_1 \cdot x_2 = -(a+3) \end{cases} \quad y = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = a^2 - 16a + 64 + 2a + 6 = a^2 - 14a + 70.$$

$y = a^2 - 14a + 70.$ Функция у квадратичная, график парабола ветви параболы направлены вверх. Следовательно, наименьшее значение выражение $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$ будет принимать при a=7 и будет равно 21.

Ответ: 21.

№9. Ваня, долго умножая, вычислил 2020! В числе, полученном Ваней, Ксюша слева направо расставила знаки действий: между первой и второй цифрами знак «-», между второй и третьей цифрами знак «+», между третьей и четвертой – «-», и так далее, до конца. Затем Ваня вычислил результат этих действий. В полученном Ваней числе Ксюша опять расставила между цифрами знаки «-» и «+» по такому же правилу. После этого Ваня опять вычислил результат, и так далее. После некоторого количества таких операций было получено однозначное число. Какое?

Решение.

Число 2020! кратно 11. Известно, что число кратно 11 тогда и только тогда, когда разность двух сумм цифр в его десятичной записи: стоящих на нечетных местах и стоящих на четных местах, кратна 11. Поэтому комбинация цифр, составленная Ксюшей, опять дает число кратное 11, и так далее. Таким образом, каждое из чисел, получаемых в результате описанных операций, кратно 11. Существует единственное однозначное число, кратное 11, это число 0.

Ответ: 0.