

**Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2020 г.**

8 класс

Вариант 1

1. Обыкновенная несократимая дробь при переводе в десятичную даёт число $0,1580(20)$, выпишите знаменатель этой дроби. (9 баллов)
2. Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в город В на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в город А, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из города В в город А велосипедист? (9 баллов)
3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC угол A равен 30° и катет AB равен 6 см. Точка D – середина AC . Через D проведена прямая перпендикулярная к гипотенузе, пересекающая AB в точке E . Найдите DE . Ответ дайте в сантиметрах. (9 баллов)
4. В лотерейном билете 8 клеточек. В каждую можно поставить любое число от 1 до 8. Клеточка считается заполненной успешно, если ваше число совпало с числом, стоящем на этом месте в выигрышном номере (он единственный и фиксированный, вы его не знаете). Сколько есть способов заполнить лотерейный билет так, чтобы ровно 3 клеточки из 8 были заполнены успешно? (9 баллов)
5. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе средней цены P (в рублях за штуку). Показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Рейтинг R вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - kP$, где k – некоторый коэффициент. В таблице даны цены и показатели четырех моделей мясорубок. (12 баллов)

| Модель мясорубки | Цена мясорубки (руб. за шт.) | Функциональность | Качество | Дизайн |
|------------------|------------------------------|------------------|----------|--------|
| А | 4400 | 0 | 4 | 4 |
| Б | 6300 | 1 | 4 | 3 |
| В | 5500 | 2 | 4 | 3 |
| Г | 5300 | 4 | 4 | 1 |

Определите наименьшее значение k , при котором рейтинг модели Б будет не больше рейтинга модели Г.

6. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются, а в точке O , а на стороне AD выбрана точка K , что $AK = 2$ см, $KD = 1$ см. Оказалось, что угол ACK равен 30° . Найдите OK (12 баллов)
7. Смешав 50%-ный и 30%-ный растворы кислоты и добавив 3 кг чистой воды, получили 20%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 3 кг воды добавили 3 кг 80%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 50%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 50%-ного раствора использовали для получения смеси? (12 баллов)
8. В остроугольном треугольнике ABC BH – высота, AM – медиана. Угол MCA в два раза больше угла MAC , $BC = 10$ см. Найдите AH . (14 баллов)
9. У натурального числа N посчитали произведение всех натуральных делителей (включая его самого). Оказалось, что максимальная степень двойки, на которую делится полученное произведение – это 178. Найдите наименьшее N с таким свойством. Получившееся число разложите на простые множители. В ответ выпишите наивысшую степень простого множителя, входящего в это разложение. (14 баллов)

Решение варианта 1

1. Обыкновенная несократимая дробь при переводе в десятичную даёт число $0,1580(20)$, выпишите знаменатель этой дроби. (9 баллов)

Решение

$$\begin{aligned}
 x &= 0,1580(20) \\
 1000000x &= 158020, (20) & (1) \\
 10000x &= 1580, (20) & (2) \\
 & (1) - (2) \\
 990000x &= 156440 \\
 x &= \frac{156440}{990000} = \frac{3911}{24750}
 \end{aligned}$$

Ответ: 24750.

2. Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в город В на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в город А, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из города В в город А велосипедист? (9 баллов)

Решение



Пусть $v_M = x$ км/ч, $v_B = y$ км/ч, время встречи 48 мин $= \frac{4}{5}$ ч. Тогда расстояние $AB = \frac{4}{5}(x + y)$ км.

Время мотоциклиста в пути $\frac{AB}{x} = \frac{4(x+y)}{5x}$, время велосипедиста в пути $\frac{AB}{y} = \frac{4(x+y)}{5y}$

Так как время мотоциклиста на 3ч меньше, то получим уравнение:

$$\frac{4(x+y)}{5y} - \frac{4(x+y)}{5x} = 3$$

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{4}$$

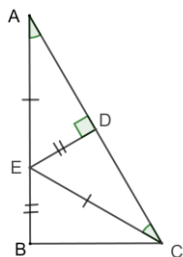
Пусть $\frac{x}{y} = a$, получим $4a^2 - 15a - 4 = 0$, тогда $a=4$ или $a=-0,25$ – посторонний.

Имеем $\frac{x}{y} = 4$, $x = 4y$, время велосипедиста в пути равно $\frac{4(4y+y)}{5y} = 4$ ч

Ответ: 4 часа.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC угол A равен 30° и катет AB равен 6 см. Точка D – середина AC . Через D проведена прямая перпендикулярная к гипотенузе, пересекающая AB в точке E . Найдите DE . Ответ дайте в сантиметрах. (9 баллов)

Решение



Используя свойство угла 30° в прямоугольных треугольниках ABC, ADE, BCE , признаки равенства треугольников и свойства серединного перпендикуляра к отрезку, получаем: $BE = DE = 0,5AE$, откуда $DE = \frac{1}{3}AB$.

Ответ: 2 см.

4. В лотерейном билете 8 клеточек. В каждую можно поставить любое число от 1 до 8. Клеточка считается заполненной успешно, если ваше число совпало с числом, стоящем на этом месте в выигрышном номере (он единственный и фиксированный, вы его не знаете). Сколько есть способов заполнить лотерейный билет так, чтобы ровно 3 клеточки из 8 были заполнены успешно? (9 баллов)

Решение

Распределение успешных клеточек может произойти ($C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$) способами. В каждом из этих случаев три успешных номера будут иметь фиксированные значения, а остальные 5 номеров могут принимать любые значения, кроме правильных, то есть всего будет 7^5 вариантов заполнить оставшиеся клетки нужным образом, для каждого из этих 56-ти распределений успешных клеточек. Получаем ответ $56 \cdot 7^5$

$$7^5 = 16807$$

$$56 \cdot 16807 = 941192$$

Ответ: 941192.

5. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе средней цены P (в рублях за штуку). Показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Рейтинг R вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - kP$, где k – некоторый коэффициент. В таблице даны цены и показатели четырех моделей мясорубок. (12 баллов)

| Модель мясорубки | Цена мясорубки (руб. за шт.) | Функциональность | Качество | Дизайн |
|------------------|------------------------------|------------------|----------|--------|
| А | 4400 | 0 | 4 | 4 |
| Б | 6300 | 1 | 4 | 3 |
| В | 5500 | 2 | 4 | 3 |
| Г | 5300 | 4 | 4 | 1 |

Определите наименьшее значение k , при котором рейтинг модели Б будет не больше рейтинга модели Г.

Решение

$$R_B = 4(2 + 8 + 3) - k \cdot 6300 = 52 - 6300k$$

$$R_G = 4(8 + 8 + 1) - k \cdot 5300 = 68 - 5300k$$

$$\text{Составим неравенство: } 52 - 6300k \leq 68 - 5300k$$

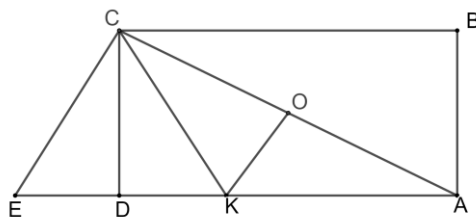
$$-1000k \leq 16$$

$$k \geq -0,016$$

Ответ: при $k = -0,016$.

6. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются, а в точке O , а на стороне AD выбрана точка K , что $AK = 2$ см, $KD = 1$ см. Оказалось, что угол ACK равен 30° . Найдите OK (12 баллов)

Решение



Построим на продолжении стороны AD за точку D точку E так, что $CD = DE$. Тогда треугольники CDK и CDE равны, поэтому $CK = CE$. В треугольнике ACE отрезок OK – средняя линия, поэтому $OK = 0,5CE = 0,5CK$. Покажем, что угол KOC прямой. Для этого опустим из K на AC перпендикуляр KQ . По свойству прямоугольного треугольника с углом 30° имеем $KQ = 0,5CK = KO$. Отсюда O и Q совпадают. В треугольнике AKC высота совпадает с медианой, поэтому $CK = AK = 2$ см, а $OK = 1$ см.

Ответ: 1 см

7. Смешав 50%-ный и 30%-ный растворы кислоты и добавив 3 кг чистой воды, получили 20%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 3 кг воды добавили 3 кг 80%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 50%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 50%-ного раствора использовали для получения смеси? (12 баллов)

Решение

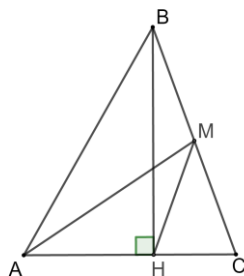
| № раствора | Масса (кг) | Кислота (кг) | Кислота (%) |
|------------|-------------|--|-------------|
| 1 | x | $0,5x$ | 50% |
| 2 | y | $0,3y$ | 30% |
| 3 | $x + y + 3$ | $0,2(x + y + 3)$ или $0,5x + 0,3y$ | 20% |
| 4 | 3 | 2,4 | 80% |
| 5 | $x + y + 3$ | $0,5(x + y + 3)$ или $0,5x + 0,3y + 2,4$ | 50% |

Получим систему: $\begin{cases} 0,6 + 0,2x + 0,2y = 0,5x + 0,3y \\ 1,5 + 0,5x + 0,5y = 0,5x + 0,3y + 2,4 \end{cases}; \begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2y = 9 \end{cases}; \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 4,5 \end{cases}$

Ответ: 0,5 кг 50%-ного раствора.

8. В остроугольном треугольнике ABC BH – высота, AM – медиана. Угол MCA в два раза больше угла MAC , $BC = 10$ см. Найдите AH . (14 баллов)

Решение



Проведем отрезок HM . Он является медианой в прямоугольном треугольнике BHC , поэтому равен половине BC . Пусть $\angle MAC = \alpha$, тогда $\angle MCA = 2\alpha$. Так как $MC = MH$, то треугольник HMC равнобедренный, следовательно $\angle MHC = \angle MCH = 2\alpha$. Так как угол MHC – внешний в треугольнике AHM , то $\angle AMH = \angle MHC - \angle MAH = \alpha$. Таким образом, треугольник AHM равнобедренный, то есть $AH = HM = \frac{BC}{2} = 5$ см.

Ответы: 5 см.

9. У натурального числа N посчитали произведение всех натуральных делителей (включая его самого). Оказалось, что максимальная степень двойки, на которую делится полученное произведение – это 178. Найдите наименьшее N с таким свойством. Получившееся число разложите на простые множители. В ответ выпишите наивысшую степень простого множителя, входящего в это разложение. (14 баллов)

Решение

Пусть в разложение этого числа на простые множители число 2 входит в степени a (очевидно, $a \geq 1$, иначе число не будет кратно 2 и вовсе). Кроме того, пусть у этого числа ровно k нечётных делителей ($k \geq 1$, так как всегда есть хотя бы один нечётный делитель – число 1).

Тогда каждый из этих k нечётных делителей при умножении на $2^1, 2^2, \dots, 2^a$ порождает по a чётных делителей, причём их произведение будет содержать $2^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^a = 2^{1+2+\dots+a} = 2^{a(a+1)/2}$.

В таком случае произведение всех делителей числа N будет содержать число 2 в степени $ka(a+1)/2 = 178$. Решим это уравнение в натуральных числах.

Поскольку 178 раскладывается на простые множители как $2 \cdot 89$, одно из чисел $k, a, (a+1)$ кратно 89. Но это не могут быть a или $(a+1)$, так как тогда $a(a+1)/2 \geq 88 \cdot 89/2 > 178$. Значит, k кратно 89.

В таком случае $a(a+1)/2 = 2$ или 1, то есть $a(a+1) = 4$ или 2.

Возможен только второй случай, при котором $a = 1$ (если $a > 1$, то $a(a+1) \geq 5$). Тогда $k = 178$.

Итак, любое число N , произведение которого содержит простой множитель 2 ровно в 178-й степени, имеет ровно $k = 178$ нечётных делителей и содержит в своём разложении на простые множители число 2 ровно в $a = 1$ -й степени. Рассмотрим $N/(2^a) = N/2$ – нечётное число s ровно $k = 178$ делителями. Количество делителей натурального числа равно $(x_1+1) \cdot (x_2+1) \cdot \dots \cdot (x_m+1)$, где x_1, x_2, \dots, x_m – степени простых множителей в его разложении. У числа $N/2$ это выражение равно $178 = 2 \cdot 89$, так что либо $x_1 = 178 - 1 = 177, x_2 = 1 - 1 = 0, N/2 = p^{177} \cdot q^0$, либо $x_1 = 89 - 1 = 88, x_2 = 2 - 1 = 1, N/2 = p^{88} \cdot q^1$, где p, q – различные нечётные простые числа.

Итак, любое подходящее N выглядит либо как $N = 2 \cdot p^{177}$, либо как $N = 2 \cdot p^{88} \cdot q$, и все такие числа подходят. Наименьшее среди них, очевидно, число $2 \cdot 3^{88} \cdot 5$ – это и есть ответ.

Ответ: 88.