Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2021 г.

10 класс

Вариант 3

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+2x+2=2\sqrt{y^3z^5}, \\ 1-y=2xz\sqrt{1-4y^3z^5}+\sqrt{7-y}. \end{cases}$ (12 баллов)

2. Число p таково, что неравенство $\dfrac{4a}{3b+4c}+\dfrac{6b}{4c+2a}+\dfrac{8c}{2a+3b}\geq p$ выполняется для всех положительных чисел $a, b, c.$ Найдите наибольшее значение p. (16 баллов)

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK=5,\quad KC=4.$ Около треугольника ABK описана окружность с центром в точке O, причем площадь треугольника AOC равна $2\sqrt{15}.$ Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите $CD,$ если $\angle APB=\angle BAC.$ (16 баллов)

4. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \left(\dfrac{|x-1|}{x-1}+3a\right)^2=24-4x^2-4x, \\ 16x^2-27a^2+6ax+22x+12a+7\leq 0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра a. (16 баллов)

5. Боковые ребра $TA,\ TB,$ и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны, TH - высота тетраэдра, $\angle TAH=30°,\ \angle TBH=45°,\ BC=\sqrt{6}.$ Точка $K,$ лежащая в плоскости основания ABC, равноудалена от боковых граней тетраэдра $TABC$. Найдите $HK.$ (20 баллов)

6. <u>Ситуационная задача</u>

Спутник связи движется по круговой орбите вокруг Земли (имеет форму шара) на высоте H, равной радиусу Земли R = 6372 *км*, с периодом обращения T = 4 *ч* и постоянной угловой скоростью $w=\dfrac{2\pi}{T}$. Для того, чтобы в центре управления полетами (ЦУП) можно было получать сигнал от спутника (иметь окно для связи), он должен находиться выше плоскости горизонта ЦУПа. Определите количество окон для связи ЦУПа со спутником в течение суток и общую продолжительность этих окон, если траектория полета спутника проходит ровно над ЦУПом.

(20 баллов)

Решение варианта 3

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+2x+2=2\sqrt{y^3z^5}, \\ 1-y=2xz\sqrt{1-4y^3z^5}+\sqrt{7-y}. \end{cases}$ (12 баллов)

Решение

Рассмотрим первое уравнение системы $x^2+2x+2=2\sqrt{y^3z^5}$ $\Leftrightarrow$ $(x+1)^2+1=2\sqrt{y^3z^5}$ $\Rightarrow$ $2\sqrt{y^3z^5}\geq 1$ $\Rightarrow$ $y^3z^5\geq 1/4.$ Решения второго уравнения $1-y=2xz\sqrt{1-4y^3z^5}+\sqrt{7-y}$ должны удовлетворять условию $y^3z^5\leq 1/4.$ Следовательно, $y^3z^5=1/4.$ Тогда из первого уравнения следует, что $x=-1,$ а из второго уравнения получаем $1-y=\sqrt{7-y}$ $\Leftrightarrow y\leq 1, (1-y)^2=7-y \Leftrightarrow y=-2.$ Тогда $z^5=-1/32$, $z=-1/2$.

Ответ: $(-1;-2;-1/2).$

2. Число p таково, что неравенство $\frac{4a}{3b+4c}+\frac{6b}{4c+2a}+\frac{8c}{2a+3b}\geq p$ выполняется для всех положительных чисел $a, b, c.$ Найдите наибольшее значение p. (16 баллов)

Решение

Пусть $x=3b+4c>0,\quad y=4c+2a>0,\quad z=2a+3b>0.$ Тогда $x+y+z=4a+6b+8c,\ 4a=y+z-x,$ $6b=x+z-y,\ 8c=x+y-z.$ Имеем

$$\frac{4a}{3b+4c}+\frac{6b}{4c+2a}+\frac{8c}{2a+3b}=\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}-3.$$

Воспользуемся неравенством $u+v\geq 2\sqrt{uv}$ для неотрицательных чисел. Получаем неравенство $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}-3\geq 2+2+2-3=3,$ справедливое для всех положительных x, y, и z. Тогда для всех положительных чисел a, b, c верно неравенство $\frac{4a}{3b+4c}+\frac{6b}{4c+2a}+\frac{8c}{2a+3b}\geq 3.$

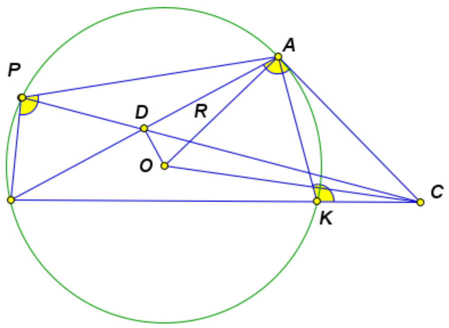
Докажем, что никакое другое число p, для которого неравенство $\frac{4a}{3b+4c}+\frac{6b}{4c+2a}+\frac{8c}{2a+3b}\geq p$ выполняется для всех положительных чисел a, b, c не может быть больше $3.$ Если положить $a=1/2, b=1/3, c=1/4,$ то $\frac{4a}{3b+4c}+\frac{6b}{4c+2a}+\frac{8c}{2a+3b}=3.$

Таким образом, наибольшее значение p равно $3.$

Ответ: $3.$

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK=5,\quad KC=4.$ Около треугольника ABK описана окружность с центром в точке O, причем площадь треугольника AOC равна $2\sqrt{15}.$ Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите $CD,$ если $\angle APB=\angle BAC.$ (16 баллов)

Решение. $\angle APB = \angle BAC,\quad \angle APB = \angle AKC,$ $\angle AKC = \angle BAC,$ $\angle KAC = \angle ABC.$ Отрезок AC является отрезком касательной к окружности.



$AC^2 = CK \cdot CB,\ \ CK = 4,\ \ CB = 9,\ AC = 6.$ Обозначим R радиус описанной около ΔABK окружности. Имеем $S_{AOC} = \dfrac{AC \cdot R}{2},\ R = \dfrac{2S_{AOC}}{AC} = 2\sqrt{\dfrac{5}{3}}.$

$\Delta ABC \approx \Delta AKC \quad \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{AK} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad AB = 3y, \quad AK = 2y.$$

Найдем сторону $AB.$ По формуле Герона имеем

$$S_{ABK} = \frac{1}{4}\sqrt{(5y+5)(5y-5)(y+5)(5-y)} = \frac{5}{4}\sqrt{(y^2-1)(25-y^2)}.$$

С другой стороны $S_{ABK} = \dfrac{AB \cdot AK \cdot BK}{4R} = \dfrac{3y^2\sqrt{15}}{4}.$ Приходим к уравнению $5\sqrt{(y^2-1)(25-y^2)} = 3y^2\sqrt{15}.$ Пусть $t = y^2.$ Тогда $5(t-1)(25-t) = 27t^2,$ и $32t^2 - 130t + 125 = 0,\ t_1 = 5/2,\ t_2 = 25/16.$ Следовательно, $y_1 = \sqrt{10}/2,\ y_2 = 5/4,$ и 1) $AB = 3\sqrt{10}/2,$ 2) $AB = 15/4.$ Поскольку $CD^2 = \dfrac{1}{4}(2AC^2 + 2BC^2 - AB^2),$ то 1) $CD = 3\sqrt{47},$ 2) $CD = \dfrac{15\sqrt{7}}{8}.$

Ответ: 1) $3\sqrt{47}$ 2) $\dfrac{15\sqrt{7}}{8}.$

4. Найдите все значения параметра *a*, при которых система

$$\begin{cases} \left(\dfrac{|x-1|}{x-1} + 3a\right)^2 = 24 - 4x^2 - 4x, \\ 16x^2 - 27a^2 + 6ax + 22x + 12a + 7 \le 0 \end{cases}$$

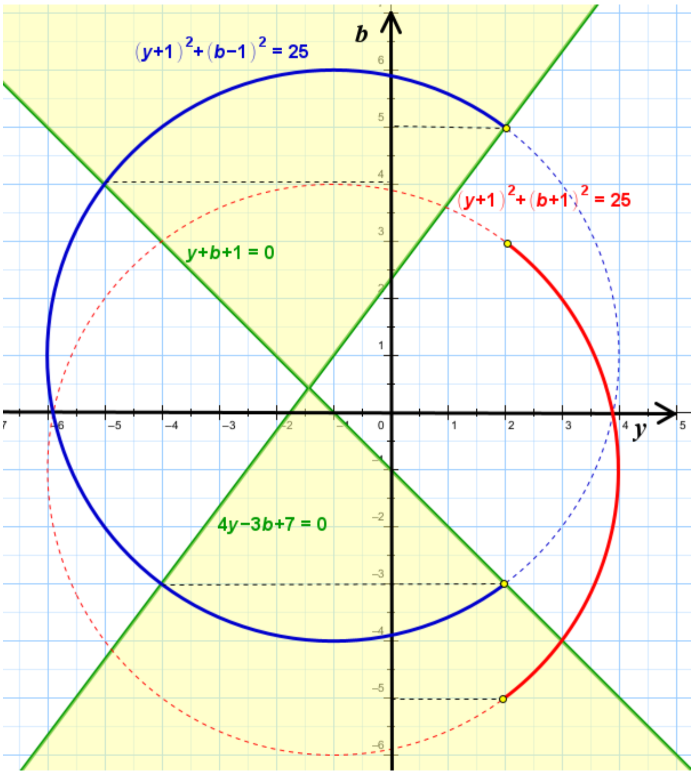
имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра *a*. (16 баллов)

Решение. Сделаем замену переменных: $y = 2x, b = 3a.$ Тогда получим систему

$$\begin{cases} (y+1)^2 + \left(\dfrac{|y-2|}{y-2} + b\right)^2 = 25, \\ 4y^2 - 3b^2 + by + 11y + 4b + 7 \le 0. \end{cases}$$

В системе координат Oyb изобразим решение полученной системы.

Построим множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы $(y+1)^2+\left(\frac{|y-2|}{y-2}+b\right)^2=25$.



При $y>2$ имеем $(y+1)^2+(1+b)^2=25$, т.е. дугу окружности с центром в точке $(-1;-1)$ и радиусом, равным 5.

При этом $y=-1+\sqrt{25-(1+b)^2}$.

При $y<2$ имеем $(y+1)^2+(-1+b)^2=25$, т.е. дугу окружности с центром в точке $(-1;1)$ и радиусом, равным 5.

При этом $y_{1/2}=-1\pm\sqrt{25-(b-1)^2}$.

Построим множество точек, удовлетворяющих неравенству системы $4y^2-3b^2+by+11y+4b+7\le 0$.

Разложим на множители левую часть неравенства, рассматривая ее как квадратный трехчлен относительно *x*: $4y^2+(b+11)y-3b^2+4b+7\le 0$,

$D=(b+11)^2+48b^2-64b-112=49b^2-42b+9=(7b-3)^2$, $y_{1/2}=\frac{-b-11\pm(7b-3)}{8}$,

$y_1=\frac{3b-7}{4}$, $y_2=-b-1$, $\Rightarrow (4y-3b+7)(y+b+1)\le 0$.

Границей области являются прямые $4y-3b+7=0,\ y+b+1=0.$ Неравенство выполняется в заштрихованной области.

Система имеет решения при $b\in(-5;-3]\cup[4;6]\Rightarrow a\in(-5/3;-1]\cup[4/3;2].$ Выпишем решения:

1) $a\in(-5/3;-4/3)$ имеем $x=\frac{-1+\sqrt{25-(1+3a)^2}}{2}$;

2) $a=-4/3$ имеем $x_1=-1/2,\ x_2=3/2$;

3) $a\in(-4/3;-1)$ имеем $x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{25-(3a-1)^2}}{2}$; 4) $a=-1$ имеем $x=-2$;

5) $a\in[4/3;5/3]$ имеем $x_1=\frac{-1-\sqrt{25-(3a-1)^2}}{2}$; 6) $a\in(5/3;2)$ имеем $x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{25-(3a-1)^2}}{2}$; 7) $a=2$ имеем $x=-1$.

Ответ: $a\in(-5/3;-1]\cup[4/3;2]$. Решения: 1) $a\in(-5/3;-4/3)$, $x=\dfrac{-1+\sqrt{25-(1+3a)^2}}{2}$;

2) $a=-4/3$, $x_1=-1/2,\ x_2=3/2$; 3) $a\in(-4/3;-1)$, $x_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25-(3a-1)^2}}{2}$;

4) $a=-1$, $x=-2$; 5) $a\in[4/3;5/3]$, $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{25-(3a-1)^2}}{2}$;

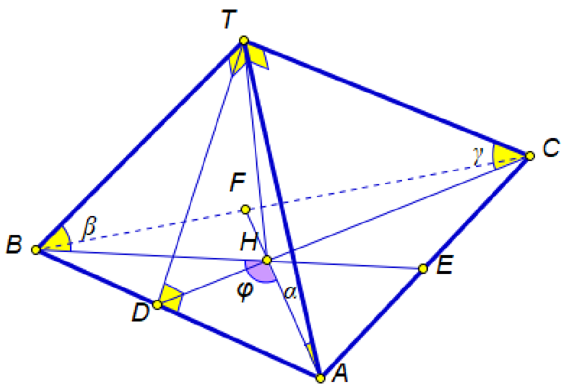
6) $a\in(5/3;2)$, $x_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25-(3a-1)^2}}{2}$; 7) $a=2$, $x=-1$.

5. Боковые ребра $TA,\ TB,$ и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны, TH - высота тетраэдра, $\angle TAH=30°,\ \angle TBH=45°,\ BC=\sqrt{6}.$ Точка $K,$ лежащая в плоскости основания ABC, равноудалена от боковых граней тетраэдра $TABC$. Найдите $HK.$ (20 баллов)

Решение. Боковые ребра $TA,\ TB,$ и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны и наклонены к плоскости основания ABC под углами α,β и γ соответственно, $\alpha=30°,\ \ \beta=45°.$ Пусть H - точка пересечения высот треугольника ABC, угол AHB равен φ. Обозначим $TC=c.$

Докажем, что а) $\sin\varphi=\dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, б) $\cos\varphi=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

Сначала докажем, что H - точка пересечения высот треугольника ABC. Действительно, $TD\perp AB,$ TD - проекция CD на плоскость ATB, поскольку $TC\perp ATB.$ По теореме о 3 перпендикулярах $CD\perp AB.$ $TH\perp CD,$ для остальных высот треугольника ACB рассуждения аналогичные. H - точка пересечения высот треугольника ABC. TH - высота пирамиды. $S_{ATB}=S_{AHB}/\sin\gamma$,



$$S_{ATB}=\frac{AT\cdot BT}{2}=\frac{AH\cdot BH}{2\cos\alpha\cos\beta},$$

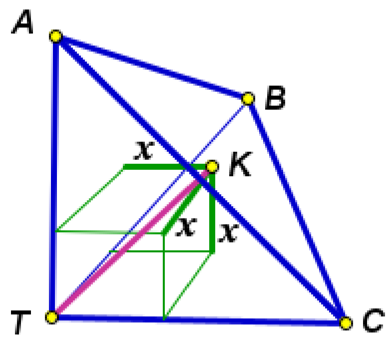
$$S_{AHB}=\frac{AH\cdot BH\sin\varphi}{2},\ \sin\varphi=\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},$$

$$\cos\varphi=\frac{AH^2+BH^2-AB^2}{2AH\cdot BH}=\frac{TA^2-TH^2+TB^2-TH^2-AB^2}{2AH\cdot BH}=\frac{-2TH^2}{2AH\cdot BH}=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Поскольку $\alpha=30°,\ \beta=45°.$ то $\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\sin\gamma = \sin\varphi\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}, \gamma = 30°.$$

Тогда



$TC = c,\quad TH = c/2, TA = c, TB = c\sqrt{2}/2,\quad BC = c\sqrt{3/2},$
$\sqrt{6} = c\sqrt{3/2},\ c = 2, \Rightarrow\ TC = 2,\ TH = 1,\ TA = 2,\ TB = \sqrt{2}.$

Пусть точка K, лежащая в плоскости основания ABC, равноудалена от боковых граней тетраэдра $TABC$. Обозначим расстояние от точки K до боковых граней пирамиды $TABC$ через *x*. Тогда $V_{TABC} = V_{KTAB} + V_{KTAC} + V_{KTBC}$,

$$\frac{TA\cdot TB\cdot TC}{6} = \frac{TA\cdot TB\cdot x}{6} + \frac{TA\cdot TC\cdot x}{6} + \frac{TB\cdot TC\cdot x}{6},$$

$$x = \frac{TA\cdot TB\cdot TC}{TA\cdot TB + TA\cdot TC + TB\cdot TC} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1),$$

$$TK = x\sqrt{3} = \sqrt{6}(\sqrt{2}-1),$$

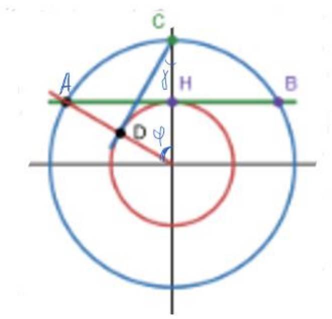
$$HK = \sqrt{TK^2 - TH^2} = \sqrt{17-12\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}.$$

Ответ: $3-2\sqrt{2}.$

6. <u>Ситуационная задача.</u>

Спутник связи движется по круговой орбите вокруг Земли (имеет форму шара) на высоте *H*, равной радиусу Земли *R* = 6372 *км*, с периодом обращения *T* = 4 *ч* и постоянной угловой скоростью $w = \frac{2\pi}{T}$. Для того, чтобы в центре управления полетами (ЦУП) можно было получать сигнал от спутника (иметь окно для связи), он должен находиться выше плоскости горизонта ЦУПа. Определите количество окон для связи ЦУПа со спутником в течение суток и общую продолжительность этих окон, если траектория полета спутника проходит ровно над ЦУПом. (20 баллов)

Решение. Пусть наблюдатель (ЦУП) находится в точке Н. *AB* – линия пересечения плоскости горизонта и плоскости орбиты. Спутник проходит в зените. При движении спутника из точки *A* в



точку С по дуге окружности, его проекция на Землю двигается из точки D в точку Н. Угловая мера этой дуги *l*=*L/2* равна величине центрального угла. Учитывая симметрию, получим время доступного проведения сеанса $t = \frac{L}{w} = \frac{2\varphi T}{2\pi} = \frac{\varphi T}{\pi}\Big|_{T=4ч=240 мин} = \frac{\varphi\cdot 240}{\pi}$.

Угол находим из прямоугольного треугольника $\cos\varphi = \frac{R}{R+H} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$, следовательно,

$$t = \frac{\varphi\cdot 240}{\pi} = \frac{\pi\cdot 240}{3\pi} = 80\ мин.$$

Поскольку период обращения равен 4 часам, следовательно, в сутки можно провести 6 сеансов и общая их продолжительность составит 480 минут или 8 часов.

Ответ: а) 6, б) 480 минут или 8 часов.