Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2021 г.

9 класс

Вариант 3

1. Решите неравенство: $3|3x-2|-|x-1|-2|x| \leq 2\sqrt{9x^2-12x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}-1$.
(15 баллов)

2. Точки E и K – соответственно середины сторон CD и AD квадрата ABCD. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O. Докажите, что вокруг четырехугольника ABOK можно описать окружность. Найти радиус этой окружности, если сторона квадрата равна 1. (15 баллов)

3. Ученики девятого, десятого и одиннадцатого классов надували шарики к празднику. Каждый девятиклассник работал 6 часов, десятиклассник – 12 часов, одиннадцатиклассник – 18 часов. При этом каждый девятиклассник надул 45 шариков, десятиклассник – 100 шариков, одиннадцатиклассник – 120 шариков. Все ученики вместе отработали 108 часов. Сколько шариков было приготовлено к празднику, если их общее количество оказалось максимально возможным?
(15 баллов)

4. Числа x и y таковы, что $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=a^2-a+2 \end{cases}$. При каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение? (15 баллов)

5. От прямой линии, проходящей через точки пересечения медиан и биссектрис тупоугольного треугольника, двумя его сторонами отсекается отрезок длиной на 1 см меньше, чем одна из длин сторон данного треугольника. Найдите наименьшую из возможных длин сторон этого треугольника, если их длины выражаются натуральными числами (в см) и образуют арифметическую прогрессию. (20 баллов)

6. Игра в кости. При броске пяти попарно различных разноцветных кубиков выпадает сумма в 21 очко. Сколько возможно различных вариантов с такой суммой? (20 баллов)

Решение варианта 3

№1: Решите неравенство:

$$3|3x-2|-|x-1|-2|x|\le 2\sqrt{9x^2-12x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}-1 \Leftrightarrow$$

$$3|3x-2|-|x-1|-2|x|\le 2|3x-2|+|x-1|-1 \Leftrightarrow$$

$$|3x-2|-2|x-1|\le 2|x|-1 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ 3x-2-2x+2\le 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1 \\ \begin{cases} \frac{2}{3}\le x<1 \\ 3x-2+2x-2\le 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\le x<1 \\ \begin{cases} 0\le x<\frac{2}{3} \\ -3x+2+2x-2\le 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le x<\frac{2}{3} \\ \begin{cases} x<0 \\ -3x+2+2x-2\le -2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x\le -1 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

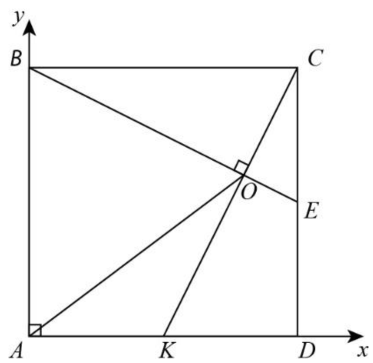
Критерии

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	Задача доведена до ответа, решение содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№2: Точки E и K – соответственно середины сторон CD и AD квадрата ABCD. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O. Докажите, что вокруг четырехугольника ABOK можно описать окружность. Найти радиус этой окружности, если сторона квадрата равна 1.

Решение

ΔBCE=ΔCDK по двум катетам, следовательно $\angle CBE = \angle DCK = 90° - \angle BCK \Rightarrow$ прямая BE перпендикулярна прямой CK. Тогда в четырехугольнике ABOK : $\angle BAK = \angle BOK = 90°$. Поэтому вокруг него можно описать окружность, радиус которой обозначим r. ΔABK: $BK=\sqrt{AB^2+AK^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}=2r \Rightarrow$ $r=\frac{\sqrt{5}}{4}$.



Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{4}$

Критерии

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№3: Ученики девятого, десятого и одиннадцатого классов надували шарики к празднику. Каждый девятиклассник работал 6 часов, десятиклассник – 12 часов, одиннадцатиклассник – 18 часов. При этом каждый девятиклассник надул 45 шариков, десятиклассник – 100 шариков, одиннадцатиклассник – 120 шариков. Все ученики вместе отработали 108 часов. Сколько шариков было приготовлено к празднику, если их общее количество оказалось максимально возможным?

Решение:

Пусть n, m и k - количество учеников девятого, десятого и одиннадцатого классов соответственно. Тогда должно выполняться равенство

$6n+12m+18k=108$, а величина $N=45n+100m+120k$ должна быть максимально возможной. Найдём производительности ученика каждого класса. Получаем

$\frac{45}{6}=\frac{270}{36}$ производительность ученика девятого класса,

$\frac{100}{12}=\frac{300}{36}$ производительность ученика десятого класса,

$\frac{120}{18}=\frac{240}{36}$ производительность ученика одиннадцатого класса.

Поэтому мы должны взять максимальное число m учеников десятого класса и минимальное число k учеников одиннадцатого класса.

n, m, k принимают значения большие или равные 1.

$6n+12m+18k=108$ или $n+2m+3k=18$, из равенства следует, что $m\le 9$.

Если $m=9$, то $n=k=0$, что не подходит по условию задачи.

Если $m=8$, то $n+3k=2$, что не подходит по условию задачи.

Если $m=7$, то $n+3k=4$, минимальное возможное значение k равно 1, тогда $n=1$.

Тогда $N=45n+100m+120k=45\cdot 1+100\cdot 7+120\cdot 1=865$.

Ответ: 865.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4: Числа x и y таковы, что $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=a^2-a+2 \end{cases}$. При каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

Решение:

Преобразуем x^2+y^2 и воспользуемся условиями системы:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a+2)^2-2\left(a^2-a+2\right)=-a^2+6a=-(a-3)^2+9=f(a)$$

Выясним при каких значениях параметра a исходная система имеет решения. Выразим переменную y из первого равенства и подставим во второе:

$$\begin{cases} y=-x+a+2 \\ x(-x+a+2)=a^2-a+2 \end{cases}$$

Исследуем полученное квадратное уравнение $x^2-(a+2)x+a^2-a+2=0$. Дискриминант уравнения равен $D=(a+2)^2-4(a^2-a+2)=-3a^2+8a-4=-(3a-2)(a-2)$, уравнение имеет корни при $a\in\left[-\frac{2}{3};2\right]$. Этот отрезок целиком входит в промежуток возрастания функции $f(a)$, следовательно, наибольшее значение достигается в крайней правой точке $a=2$ и равно $f(2)=8$.

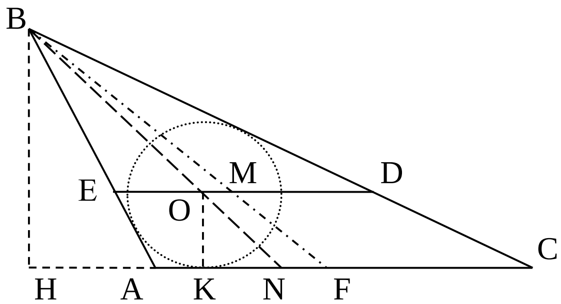
Ответ: 2.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№5: От прямой линии, проходящей через точки пересечения медиан и биссектрис тупоугольного треугольника, двумя его сторонами отсекается отрезок длинной на 1 см меньше, чем одна из длин сторон данного треугольника. Найдите наименьшую из возможных длин сторон этого треугольника, если их длины выражаются натуральными числами (в см) и образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть $\angle$ A – тупой, тогда BC – большая сторона данного треугольника ABC. И пусть $AB < AC$, тогда по условию длины AB, AC, BC – арифметическая прогрессия, т.е. $2AC = AB + BC$. Следовательно, периметр ABC равен $P = AB + AC + BC = 3AC$.



Проведем высоту BH и радиус, вписанной в ABC окружности, OK, тогда, треугольник BHN подобен треугольнику OKN (по 2-м углам: $\angle H = \angle K = 90^0$ и $\angle N$ – общий).

Из подобия: $\frac{BN}{ON}=\frac{BH}{OK}=\frac{BH\cdot AC\cdot P}{r\cdot AC\cdot P}=\frac{2S_{ABC}\cdot P}{2S_{ABC}\cdot AC}=\frac{P}{AC}=3$ => $BO: ON = 2: 1$.

Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC, тогда $BM: MF = 2: 1$ (по свойству), следовательно, OM || AC (по теореме, обратной к Т.Фалеса, для $\angle$ NBF) и $ED = 2AC/3$.

Так как, длины сторон AB, AC и BC – натуральные числа и $ED = 2AC/3$, то ED не может на 1 см быть меньше BC, иначе получится, что $ED \geq AC$. Поэтому, возможны два варианта:

1) $\text{ED} = \text{AC} - 1 => \frac{2\text{AC}}{3} + 1 = \text{AC} => AC = 3$. Тогда $\text{BC} = 3 + x$, $\text{AB} = 3 - x$, где x – натуральное число. Из неравенства тупоугольного треугольника $\text{AC}^2 + \text{AB}^2 < \text{BC}^2 =>$
$9 - 6x + x^2 + 9 < 9 + 6x + x^2 => x < 3/4$, что невозможно.

2) $ED = A\text{B} - 1 => 2AC/3 + 1 = A\text{B}$. Тогда пусть $\text{AC} = 3x => AB = 2x + 1,\ BC = 4x - 1$.
Из неравенства тупоугольного треугольника $\text{AC}^2 + \text{AB}^2 < \text{BC}^2 =>$
$4x^2 + 4x + 1 + 9x^2 < 16x^2 - 8x + 1 => x2 - 4x > 0 => x > 4$, т.е. минимальное возможное значение $x = 5 => AC = 15,\ AB = 11,\ BC = 21$.

Ответ: 11.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
14	При верном и обоснованном ходе решения разобраны не все варианты или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты , дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6: Игра в кости. При броске пяти попарно различных разноцветных кубиков выпадает сумма в 21 очко. Сколько возможно различных вариантов с такой суммой?

Решение. Выделим 3 пары из очков 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4. Очевидно, что количество вариантов сумм в 21 очко и в 14 очков – одинаково, т.к., например, для 3+6+5+4+3 = 21 есть пара 4+1+2+3+4 = 14 и т. д.
Рассмотрим различные разбиение числа 14 на 5 натуральных слагаемых – их $\text{C}_{13}^4 = 715$. Действительно, если расположить в ряд 14 точек и поставить между ними 4 плюса, то получим разбиение числа 14 на 5 слагаемых. Но среди этих вариантов есть «лишние» – такие, где есть одно «большое» число 10, 9, 8 или 7. Что бы их посчитать – надо рассмотреть следующую ситуацию. Очевидно, такое «большое» число в сумме из 5 натуральных слагаемых в 14 очков может быть только одно. Следовательно, рассмотрим разбиение суммы в $14 - 6 = 8$ очков на 5 слагаемых, а затем в каждом варианте будем добавлять по очереди к каждому слагаемому по 6 очков. Число таких вариантов и надо исключить из 715, а это: $\text{C}_5^1\text{C}_7^4 = 175$.
Итак, $715 - 175 = 540$.
Ответ: 540.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
18	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифмитические ошибки или решение недостаточно обосновано.
12	При верном и обоснованном ходе решения найдены не все варианты или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (в том числе доказана связь между суммами 21 и 14), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.