Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2021 г.

9 класс

Вариант 1

1. Решите неравенство: $|x^3+5x^2-3x+8| \geq |x^2-6x+8| + |x^3+4x^2+3x|$

2. Точки E и K – соответственно середины сторон CD и AD квадрата ABCD. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O. Найти AO, если сторона квадрата равна 1.

3. Сотрудник химической лаборатории взял бутыль, содержащую чистый спирт, отлил из неё четверть жидкости, добавил такой же объём воды, затем опять отлил четверть жидкости и опять добавил четверть объема воды. Эту операцию от повторил n раз. При каком наименьшем значении n процентное содержание спирта в бутыли станет меньше 24%?

4. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} 2x+ay=a+3 \\ (a+2)x+2ay=6a-2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

5. В острый угол вписали 1-ю окружность радиуса 2020 мм, затем вписали 2-ю окружность меньшего радиуса так, что она касается предыдущей, после вписали в угол третью окружность так, что она касается второй, и т.д. Укажите номер окружности наибольшего радиуса среди тех, у которых радиус меньше 1 мм, если косинус данного угла равен 7/9.

6. Игра в кости. При броске шести попарно различных разноцветных кубиков выпадает сумма в 28 очков. Сколько возможно различных вариантов с такой суммой?

Решение варианта 1

№1: $|x^3+5x^2-3x+8| \geq |x^2-6x+8|+|x^3+4x^2+3x|$

Решение

Обозначим a=x^2-6x+8, b=x^3+4x^2+3x.

Тогда a+b=x^3+5x^2-3x+8. Таким образом, рассмотрим неравенство

$$|a+b| \geq |a|+|b| \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq a^2+2|a||b|+b^2 \Leftrightarrow$$

ab$\geq |a||b| \Leftrightarrow |ab| \leq ab \Leftrightarrow ab \geq 0$. Из полученного следует, что решение исходного неравенства равносильно решению неравенства

$$(x^2-6x+8)\cdot(x^3+4x^2+3x) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x(x-4)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x+1) \geq 0$$

Ответ: $[-3;-1] \cup [0;2] \cup [4;+\infty)$.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
8	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (например, установлено, что под модульное выражение левой части есть сумма под модульных выражений из правой части)дальнейшее решение неверно или отсутствует или содержит арифметическую ошибку
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№2: Точки E и K – соответственно середины сторон CD и AD квадрата ABCD. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O. Найти AO, если сторона квадрата равна 1.

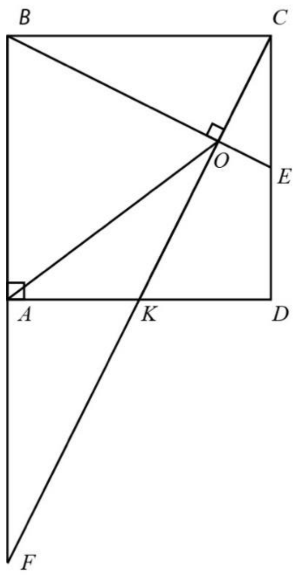
Решение

ΔBCE=ΔCDK по двум катетам, следовательно

<CBE = <DCK=90°- <BCK ⟹ <COB=<BOK=90°, т.е. прямая BE перпендикулярна прямой CK.

Продолжим отрезок CK до точки F пересечения с прямой AB. Прямоугольные треугольники KDC и KAF равны по катету и острому углу, поэтому AF=DC=AB=1.

Точка O принадлежит окружности с центром в точке A, является вершиной прямого угла, опирающегося на диаметр BF. Следовательно. AO=AF=AB=1.



Ответ: 1.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
12	При правильном ответе есть замечания к четкости его изложения и обоснования или решение содержит арифметическую ошибку.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№3: Сотрудник химической лаборатории взял бутыль, содержащую чистый спирт, отлил из неё четверть жидкости, добавил такой же объём воды, затем опять отлил четверть жидкости и опять добавил четверть объема воды. Эту операцию от повторил n раз. При каком наименьшем значении n процентное содержание спирта в бутыли станет меньше 24%?

Решение

Пусть в сосуде было x литров спирта. После первого этапа в сосуде стало $\frac{3}{4}x$ литров спирта и $\frac{1}{4}x$ литров воды.

После второго выливания уходит четверть всей жидкости, и соответственно, четверть спирта, значит остается три четверти от имеющегося количества - $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}x\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2 x$ литров спирта.

После третьего выливания уходит четверть всей жидкости, и соответственно, четверть спирта, значит остается три четверти от имеющегося количества - $\frac{3}{4}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 x\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^3 x$ литров спирта.

После n-го этапа в бутыли $\left(\frac{3}{4}\right)^n x$ литров спирта.

Необходимо найти наименьшее n, при котором $\left(\frac{3}{4}\right)^n x<\frac{24}{100}x$.

При $n=1$ получаем $\left(\frac{3}{4}\right)^1>\frac{24}{100}$, при $n=2$ получаем $\left(\frac{3}{4}\right)^2>\frac{24}{100}$,

при $n=3$ получаем $\left(\frac{3}{4}\right)^3>\frac{24}{100}$, при $n=4$ получаем $\left(\frac{3}{4}\right)^4>\frac{24}{100}$,

при $n=5$ получаем $\left(\frac{3}{4}\right)^5<\frac{24}{100}$.

Ответ: 5.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4: При каких значениях параметра a система $\begin{cases} 2x+ay=a+3 \\ (a+2)x+2ay=6a-2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решение

Выразим переменную x из первого равенства $x=\dfrac{-ay+a+3}{2}$, заметим, что значение x существует и единственно при любых значениях переменной y и параметра a.

Подставим x во второе уравнение, получим: $(a+2)\dfrac{-ay+a+3}{2}+2ay=6a-2$, преобразовав, получим линейное уравнение с параметром: $a(a-2)y=(a-2)(a-5)$.

Это уравнение

при $a=0$ превращается в $0\cdot y=10$ и не имеет решений,

при $a=2$ превращается в $0\cdot y=0$ и имеет бесконечно много решений,

при других значениях параметра a имеет единственное решение.

Следовательно, система имеет бесконечно много решений при $a=2$.

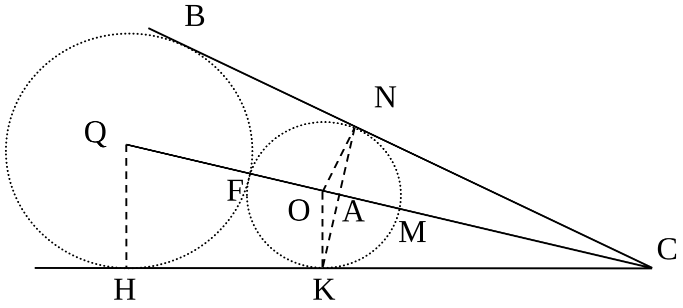
Ответ: 2.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№5: В острый угол вписали 1-ю окружность радиуса 2020 мм, затем вписали 2-ю, меньшего радиуса так, что она касается предыдущей и т.д. Найдите номер окружности, у которой радиус наибольший и меньше 1 мм, если косинус данного угла равен 7/9.

Решение. Впишем в данный $\angle B$CH две окружности (см. рисунок) с центрами Q и O.



По свойству вписанных окружностей: точка O лежит на биссектрисе CQ угла ∠BCH.
По свойству касательных: $\mathrm{CK} = \mathrm{CN}, \angle\mathrm{OKC} = \angle\mathrm{ONC} = 90^0$, следовательно, треугольник OCK прямоугольный и KA – его высота.
По формуле площади прямоугольного треугольника: $2S_{OKC} = \mathrm{AK}\cdot\mathrm{OC} = \mathrm{OK}\cdot\mathrm{KC}$ (1).
Треугольники QHC и OKC – подобны по 2-м углам (∠H и ∠K – прямые, а ∠C – общий), следовательно, $\mathrm{OK}\cdot\mathrm{QC} = \mathrm{QH}\cdot\mathrm{OC}$. Пусть $\mathrm{OC} = x, \mathrm{OK} = r, \mathrm{QH} = R,$ тогда
$r\cdot(x+r+R) = R\cdot x \Rightarrow x = \frac{r\cdot(R+r)}{R-r}$ (2).
Тогда, $\mathrm{KC}^2 = x^2 - r^2 = \frac{4r^2R}{(R-r)^2}$ и по теореме Косинусов для треугольника KCN:
$\mathrm{KN}^2 = 4\mathrm{KA}^2 = \mathrm{KC}^2 + \mathrm{CN}^2 - 2\mathrm{KC}\cdot\mathrm{CN}\cdot\frac{7}{9} = \frac{4}{9}\mathrm{KC}^2$ ($\mathrm{Cos}\angle KCN = \frac{7}{9}$ по условию) => из (1):
$\frac{x}{3}\mathrm{KC} = r\mathrm{KC} \Rightarrow x = 3r \Rightarrow$ из (2):
$3r(R-r) = r(R+r) \Rightarrow R = 2r$, т.е. радиус следующей окружности в 2 раза меньше радиуса предыдущей. Тогда, радиус -ой окружности равен $R_N = \frac{2020}{2^{N-1}} < 1$, так как
$2^{10} = 1024 < 2020 < 2048 = 2^{11}$, то $N = 12$.
Ответ: 12.
Критерии

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
16	При верном и обоснованном ходе решения разобрано одно из неравенств для 2020 или решение недостаточно обосновано.
13	Верно начато решение задачи, обосновано найден радиус -ой окружности, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
10	Верно начато решение задачи, обосновано найден радиус 2-ой окружности, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№6: Игра в кости. При броске шести попарно различных разноцветных кубиков выпадает сумма в 28 очков. Сколько возможно различных вариантов с такой суммой?
Решение
Выделим 3 пары из очков 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4. Очевидно, что количество вариантов сумм в 28 очко и в 14 очков – одинаково, т.к., например, для 3+6+5+4+6+4 = 28 есть пара 4+1+2+3+1+3 = 14 и т. д. Рассмотрим различные разбиение числа 14 на 6 натуральных слагаемых – их $\mathrm{C}_{13}^5 = 1287$. Действительно, если расположить в ряд 14 точек и поставить между ними 5 плюсов, то получим разбиение числа 14 на 6 слагаемых. Но среди этих вариантов есть «лишние» – такие, где есть одно «большое» число 9, 8 или 7. Что бы их посчитать – надо рассмотреть следующую ситуацию. Очевидно, такое «большое» число в сумме из 6 натуральных слагаемых в 14 очков может быть только одно. Следовательно, рассмотрим разбиение суммы в $14 - 6 = 8$ очков на 6 слагаемых, а затем в каждом варианте будем добавлять по очереди к каждому слагаемому по 6 очков. Число таких вариантов и надо исключить из 1287, а это: $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_7^5 = 126$. Итак, $1287 - 126 = 1161$.
Ответ: 1161.

Критерии

Баллы	Критерии выставления
20	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
18	При верном и обоснованном ходе решения допущены арифмитические ошибки или решение недостаточно обосновано.
12	При верном и обоснованном ходе решения найдены не все варианты или решение недостаточно обосновано.
6	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (в том числе доказана связь между суммами 28 и 14), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.