Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2021 г.

8 класс

Вариант 3

1. При каких целых значениях параметра a для корней $x_1,\ x_2$ уравнения $3x^2 - x(a+3) + a = 0$ выражение $\dfrac{1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2}}$ будет натуральным числом?

2. Решите уравнение $\sqrt{x+7+6\sqrt{x-2}} - \sqrt{x+142+24\sqrt{x-2}} = x^2 - 18$.

3. В ΔABC AA_1 – медиана, $AA_1 = 2\sqrt{13}$. Точка M - точка пересечения медиан ΔABC. Найти площадь ΔBMA_1, если известно, что $AC = 3MB = 10$.

4. При каких значениях параметра b площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости xOy графиками $y = 3\cdot|x| - 5$ и $y = |x| + b^2 + 1$, равна 32?

5. В прямоугольном ΔABC с углом $\angle C = 90^0$, точка M середина отрезка AB, точка K делит отрезок AC в отношении 1:2, считая от точки А. Прямая KM пересекает отрезок BC в точке L и перпендикулярна CM. Найти величину $\angle CLK$ и отношение отрезков $BE : \mathrm{LM}$.

6. Марфа Петровна родилась в XX веке. В 2010 году ей было столько лет, какова сумма цифр года ее рождения. В каком году она родилась, если известно, что Марфе Петровне меньше ста лет?

Решение варианта 3

1. При каких целых значениях параметра a для корней $x_1,\ x_2$ уравнения $3x^2 - x(a+3) + a = 0$ выражение $\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2}}$ будет натуральным числом?

Решение: $D = (a+3)^2 - 4\cdot 3a = (a-3)^2$, $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{a}{3}$, выражение

$$\frac{1}{\sqrt{(x_1-x_2)^2}} = \frac{1}{|x_1-x_2|} = \frac{1}{|1-\frac{a}{3}|} = \frac{3}{|a-3|}$$

будет натуральным при $|a-3| = 1$ или $|a-3| = 3$.

Ответ: 0; 2; 4;6.

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
12	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение
10	При верном ходе решения найдена только часть значений параметра
5	Выражение преобразовано без модуля
0	Решение не верно или отсутствует

2. Решите уравнение $\sqrt{x+7+6\sqrt{x-2}} - \sqrt{x+142+24\sqrt{x-2}} = x^2 - 18$

Решение: $\sqrt{x-2} = t \geq 0; x = t^2 + 2;\ \sqrt{6t+t^2+9} - \sqrt{t^2+2+24t+142} = |t+3| - |t+12| = t+3-t-12 = -9;\ x^2 - 18 = -9; x = \mp 3; x \geq 2; x = 3.$

Ответ: 3.

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
10	Не поставлены или необоснованно раскрыты модули; или при верном ходе решения, допущена ошибка в конце, связанная с ОДЗ
5	Собраны полные квадраты
0	Решение не верно или отсутствует

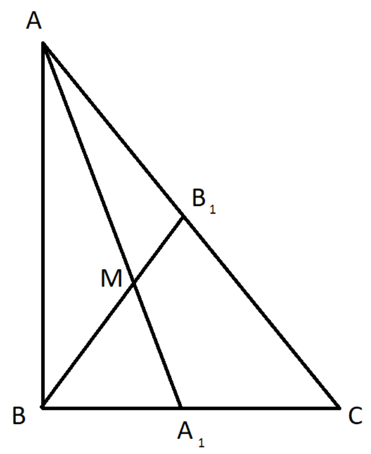
3. (15 баллов) В ΔABC AA_1– медиана, $AA_1 = 2\sqrt{13}$. Точка M - точка пересечения медиан ΔABC. Найти площадь ΔBMA_1, если известно, что $AC = 3MB = 10$.

Решение:

1). $AC = 3MB \Rightarrow AC = 2BB_1$, где BB_1 медиана $\Rightarrow \Delta ABC$ прямоугольный с прямым углом B.

Введем обозначения $AB = x,\ BC = 2y$ и решив полученную систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ x^2 + 4y^2 = 100 \end{cases}$

Получим x=6, y=4.



2). $S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$.

3). Так как, при пересечении медиан, образуются 6 равновеликих треугольников, то

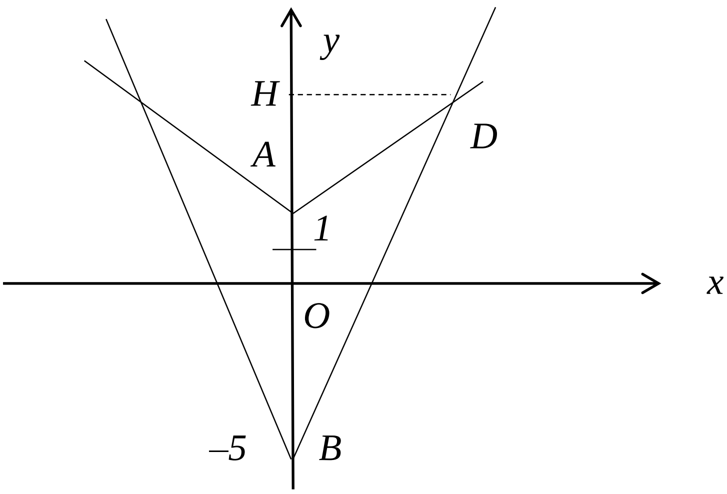
$S_{\Delta BMA_1}=\frac{1}{6}\cdot S_{\Delta ABC}=4$

Ответ: 4.

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
10	При верном ходе решения допущена одна арифметическая ошибка.
5	Доказано, что ΔABC - прямоугольный.
0	Решение не верно или отсутствует

4. При каких значениях параметра b площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости xOy графиками $y=3\cdot|x|-5$ и $y=|x|+b^2+1$, равна 32?

Решение: для первого графика при $x\geq 0$ $y=3x-5$, при $x<0$ $y=-3x-5$. Эти прямые пересекают ось Оy в точке $B(0;-5)$. Для второго графика при $x\geq 0$ $y=x+b^2+1$, при $x<0$, $y=-x+b^2+1$, $y=|x|+b^2+1\geq|x|+1$, точка $A(0;b^2+1)$ пересечения с осью Оy лежит выше точки $(0;1)$ или совпадает с ней.



Площадь фигуры, образованной данными графиками, равна $S=2S_{ABD}=AB\cdot DH$. Найдем абсциссу точки D из системы $\begin{cases} y=3x-5 \\ y=x+b^2+1 \end{cases}$. $x=\frac{b^2}{2}+3=\frac{b^2+6}{2}=DH$.

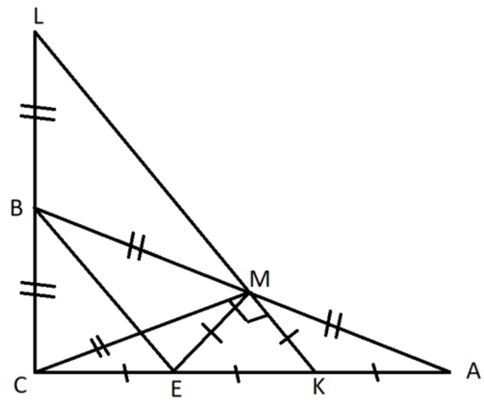
$AB = b^2 + 6$, поэтому $S = AB \cdot DH = \dfrac{(b^2+6)(b^2+6)}{2} = 32$. Откуда $b^2 + 6 = 8$ или $b^2 + 6 = -8$, $b^2 = 2$ или $b^2 = -14$.

Ответ: $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
12	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10	Верно получена фигура, правильно найдены некоторые величины для вычисления площади фигуры, но не все.
5	Верно получена фигура, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
0	Решение не верно или отсутствует

5. В прямоугольном ΔABC с углом $\angle C = 90^0$, точка M середина отрезка AB, точка K делит отрезок AC в отношении 1:2, считая от точки А.
Прямая KM пересекает отрезок BC в точке L и перпендикулярна CM.
Найти величину $\angle CLK$ и отношение отрезков $BE : \mathrm{LM}$.

Решение:



1). CM - медиана прямоугольного $\Delta ABC \Rightarrow BM = MC = MA \Rightarrow \Delta CMA$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle MCA = \angle CAM$

2). Пусть точка Е – середина CK, тогда $CE = EK = KA = ME$, так как ME - медиана прямоугольного ΔCMK

3). $\Delta CME = \Delta KMA$ по 2-м сторонам и углу между ними.

$$\Rightarrow ME = MK \Rightarrow MK = \frac{1}{2}CK \Rightarrow \angle MAC = \angle MCK = 30^0$$

$\Rightarrow \angle MKC = 60^0 \Rightarrow \angle CLK = 30^0$ и $BC = \dfrac{1}{2}BA = BM = BL \Rightarrow BE$ - средняя линия ΔLCK.

4). $BE = \dfrac{1}{2}LK = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}LM = \dfrac{2}{3}LM$

Ответ: $\angle CLK = 30^0$ и $BE : LM = 2:3$.

Баллы	Критерии оценивания
20	Полное обоснованное решение
15	При верном ходе решения допущена одна арифметическая ошибка
10	При верном ходе решения задачи, найдено или отношение отрезков или угол
5	Верно доказано утверждение, которое могло бы привести к решению задачи
0	Решение не верно или отсутствует

6. Марфа Петровна родилась в XX веке. В 2010 году ей было столько лет, какова сумма цифр года ее рождения. В каком году она родилась, если известно, что Марфе Петровне меньше ста лет?

Решение: Пусть Марфа Петровна родилась в $\overleftrightarrow{19xy}$ году. 2010-$\overleftrightarrow{19xy}$=1+9+x+y; x$\epsilon[0;9]$; $y\epsilon[1;9]$; 1900 год-это 19 век; 2010-1900-10x-y=10+x+y; 100-11x=2y; y=50-$\frac{11x}{2}$; 11 не делится на 2; значит, x⋮ 2;

1)x=2,y=50-11$> 9;2) x=4, y=50-22>9;3) x=6, y=50-33>9;4) x=8, y=50-44=6;$ 1986 год.

Ответ:1986.

Баллы	Критерии оценивания
20	Полное обоснованное решение
15	Верное решение с недостатками обоснования
10	Рассмотрены не все случаи
5	Только верный ответ, без исследования
0	Решение не верно или отсутствует