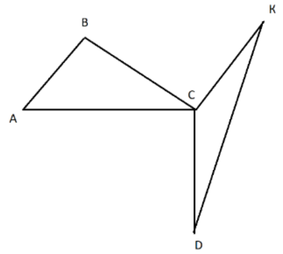
Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2021 г.

8 класс

Вариант 1

№1. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2+ax-a}{x^2-5x+6}=0$ имеет ровно одно решение?

№2 Решите уравнение: $\sqrt{\dfrac{5\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}-\dfrac{3\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}}-|x-4|=0.$



№3 ΔABC – остроугольный. Отрезок $CK\perp CB$ и $CK=CB$; отрезок $CD\perp AC$ и $CD=AC$, как показано на рисунке. Найти площадь ΔABC, если площадь ΔCKD =18.

№4 При каких значениях параметра a площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости xy линиями $y=\dfrac{x}{2}+1$, $y=\dfrac{x}{2}-1$, $x=a-1-a^2$, $x=a^2-3a+1$, равна 16?

№5 В ΔABC со сторонами $AB=12$, $AC=16$ и $BC=7$, проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекающиеся в точке P.

Продолжение высоты ΔABA_1, проведенной из точки B, пересекает сторону AC в точке B_1, а биссектрису CC_1 в точке T.

Найти $AP:\mathrm{PB}_1$ и $BT:\mathrm{TA}_1$.

№6 Новогодние гирлянды упаковывают для перевозки в магазин. При собирании их в пучки по 6,7 или 8 штук остается каждый раз одна лишняя. При количестве пять в пучке лишних не остается. Каково количество гирлянд? Известно, что их не более 1500 и не менее 600.

Решение варианта 1

№1. При каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{x^2+ax-a}{x^2-5x+6}=0$ имеет ровно одно решение?

Решение: 1) Для числителя $D=a^2+4a=a(a+4)=0$

При $a=0$ уравнение $\dfrac{x^2}{(x-3)(x-2)}=0$ имеет 1 решение,

при $a=-4$ уравнение $\dfrac{(x-2)^2}{(x-3)(x-2)}=0$ не имеет решений.

2) Надо, чтобы один из корней числителя был равен 3, другой отличен от 2.

В числителе $x=3$ при $a=-\dfrac{9}{2}$, другой корень $x=\dfrac{3}{2}$, поэтому уравнение имеет 1 решение.

3) Один из корней числителя равен 2, другой отличен от 3. В числителе $x=2$ при $a=-4$, этот случай уже рассмотрен, решений нет.

Ответ: 0; –9/2.

Баллы	Условия выставления
15	Полное обоснованное решение
12	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение.
10	Рассмотрены два случая из трех.
5	Рассмотрен только случай $D=0$.
0	Неверные рассуждения или записан только ответ.

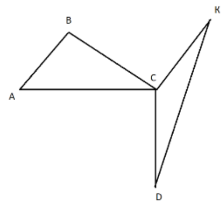
№2 Решите уравнение: $\sqrt{\frac{5\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}-\frac{3\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}}-|x-4|=0$ (15 б.)

Решение: При x<-2, $\sqrt{-5+3}=|x-4|$ нет решений; при x$\epsilon(-2;5)$ $\sqrt{-5-3}=|x-4|$ нет решений; при x>5 $\sqrt{5-3}=|x-4|$;x=4+$\sqrt{2}$.

Ответ: 4+$\sqrt{2}$.

Баллы	Критерии оценивания
15	Полное обоснованное решение
10	При верном ходе решения допущена вычислительная ошибка
5	Рассмотрены только некоторые случаи раскрытия модуля
0	Решение не верно или отсутствует

№3 ΔABC – остроугольный. Отрезок $CK \perp CB$ и $CK = CB$; отрезок $CD \perp AC$ и $CD = AC$, как показано на рисунке.



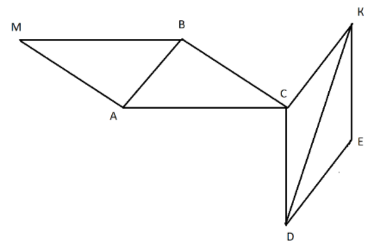
Найти площадь ΔABC , если площадь ΔCKD =18.

Решение

Проведем $KE \parallel CD$ и $KE = CD \Rightarrow CKED$ - параллелограмм.

Проведем $BM \parallel AC$ и $BM = AC \Rightarrow CBMA$ - параллелограмм.

$\angle BCA = \angle CDE \Rightarrow BMAC = CKED$.



Так как диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, то ΔABC равновелик с $\Delta CKD \Rightarrow S_{\Delta ABC} = 18$.

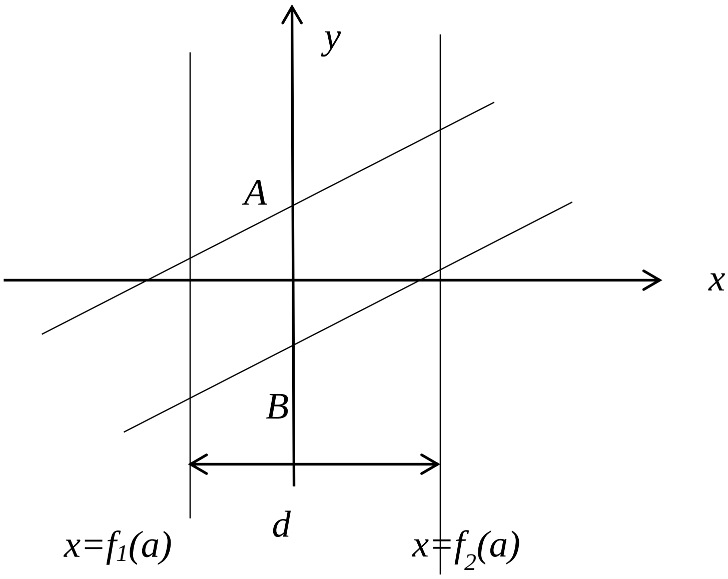
Ответ: 18.

Баллы	Критерии выставления оценок
15	Полное обоснованное решение
10	Решение верно, но недостаточно обоснованно.
5	Решение начато верно, но не доведено до конца.
0	Решение не верно или отсутствует

№4 При каких значениях параметра a площадь фигуры, ограниченной на координатной плоскости xy линиями $y = \frac{x}{2} + 1$, $y = \frac{x}{2} - 1$, $x = a - 1 - a^2$, $x = a^2 - 3a + 1$, равна 16?

Решение: прямые $y = \frac{x}{2} + 1$, $y = \frac{x}{2} - 1$ параллельны, пересекают ось Оy в точках $A(0;1)$ и $B(0;-1)$, $AB = 2$. Обозначим $f_1(a) = a - 1 - a^2$, $f_2(a) = a^2 - 3a + 1$. Прямые $x = f_1(a), x = f_2(a)$ параллельны оси Оy. Расстояние между ними равно $d = f_2(a) - f_1(a) = a^2 - 3a + 1 - \left(a - 1 - a^2\right) = 2(a^2 - 2a + 1) = 2(a-1)^2$. Площадь параллелограмма, образованного данными прямыми, равна $S = AB \cdot d = 2 \cdot 2(a-1)^2$. Она равна 16 при $2 \cdot 2(a-1)^2 = 16, (a-1)^2 = 4.$

$a - 1 = 2$ или $a - 1 = -2$; $a = 3$ или $a = -1$.



Ответ: 3; –1.

Баллы	Условия выставления
15	Полное обоснованное решение
12	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10	Правильно найдены некоторые величины для вычисления площади параллелограмма, но не все.
5	Верно сведено к площади параллелограмма, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
0	Решение не верно или отсутствует

№5 В ΔABC со сторонами $AB=12$, $AC=16$ и $BC=7$, проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекающиеся в точке P.

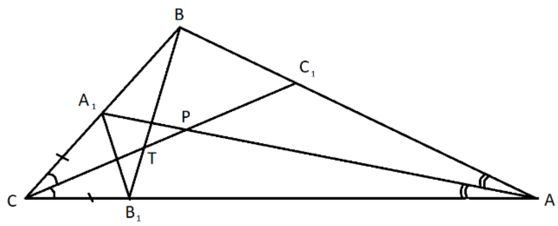
Продолжение высоты ΔABA_1 , проведенной из точки B, пересекает сторону AC в точке B_1, а биссектрису CC_1 в точке T. Найти $AP:\mathrm{PB}_1$ и $BT:\mathrm{TA}_1$.

Решение:

1). $AB=AB_1=12 \Rightarrow B_1C=16-12=4$

2). $\dfrac{A_1B}{A_1C}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow A_1B=3, A_1C=4$

3). $\Rightarrow A_1C=B_1C \Rightarrow CC_1$- серединный перпендикуляр к $A_1\mathrm{B}_1 \Rightarrow$ точки T и P равноудалены от точек A_1 и B_1 .



4). $\Rightarrow \frac{AP}{PB_1} = \frac{AP}{PA_1} = \frac{AC}{CA_1} = \frac{16}{4} = \frac{4}{1}$

$\frac{BT}{TA_1} = \frac{BT}{TB_1} = \frac{BC}{CB_1} = \frac{7}{4}$

Ответ: 4:1, 7:4

Баллы	Критерии выставления оценок
20	Полное обоснованное решение
15	При верном ходе решения допущена одна арифметическая ошибка.
10	При верном ходе решения задачи, верно найдено одно из отношений.
5	Верно доказано утверждение, которое могло бы привести к решению задачи (ΔABB_1 - равнобедренный; ΔA_1B_1C - равнобедренный; CC_1 - серединный перпендикуляр к A_1B_1)
0	Решение не верно или отсутствует

№6 Новогодние гирлянды упаковывают для перевозки в магазин. При собирании их в пучки по 6,7 или 8 штук остается каждый раз одна лишняя. При количестве пять в пучке лишних не остается. Каково количество гирлянд? Известно, что их не более 1500 и не менее 600.

Решение. НОК (6,7,8) =168. Число гирлянд 168k+1,$k\epsilon N, 168k+1 \vdots 5$. Перебираем значения k=1,2,3,4,5,6,7-не подходят, k=8 дает 1345 штук; k=9 дает число 1513, большее 1500.

Ответ: 1345.

Баллы	Критерии оценивания
20	Верное решение
15	Верный ответ при недостатке обоснования
10	Решение неполным перебором случаев
5	Только верный ответ без разбора случаев
0	Решение не верно или отсутствует