Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2021 г.

11 класс

Вариант 5

1. Функция $f(x)$ при всех действительных $x \neq 1$ удовлетворяет соотношению

$$(x-1) f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+4 f(x)+14x=0.$$

Решите уравнение $4 \cdot 8^{x}=7+2^{f(x)}$. (12 баллов)

2. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого верно неравенство

$$(1^3+2^3+\cdots+n^3)-106(1+2+\cdots+n)+105 \leq 0.$$

(16 баллов)

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK=9\sqrt{2}/2$, $BK=9$, $KC=3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и точку D, лежащую на стороне AB, проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите DP, если $\angle APB=\angle BAC$, CD – биссектриса треугольника ABC. (16 баллов)

4. Найдите все значения параметра *a*, при которых система

$$\begin{cases} 7a-30\cos t+3 \leq 0, \\ 5\sin t+a+\dfrac{1}{2}+\dfrac{|\cos t|}{2\cos t}+\dfrac{|5\cos t-4|}{5\cos t-4}=0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра *a*. (16 баллов)

5. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=2$ и $BC=6$. Высотой пирамиды $SABC$ является отрезок SD, где точка D симметрична точке B относительно середины отрезка AC. Точка M принадлежит боковому ребру SB, причем $SM=2MB$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через D параллельно гипотенузе основания AC и отрезку AM, если расстояние от точки B до секущей плоскости равно $\sqrt{14}$. (20 баллов)

6. <u>Ситуационная задача</u>

Искусственный спутник (ИСЗ) движется по круговой орбите вокруг Земли (имеет форму шара) на высоте *H*, равной радиусу Земли *R* = 6372 *км*, с периодом обращения *T* = 4 *ч* и постоянной угловой скоростью $w=\dfrac{2\pi}{T}$. Для того, чтобы можно было наблюдать за спутником с поверхности Земли, он должен находиться выше плоскости горизонта. Определите: а) продолжительность наблюдения за спутником (в минутах) от момента его появления над горизонтом до момента захода за горизонт, если траектория ИСЗ проходит ровно над головой наблюдателя; б) плоский угол при вершине конуса обзора поверхности Земли с ИСЗ (в градусах). (20 баллов)

Решение варианта 5

1. Функция $f(x)$ при всех действительных $x \neq 1$ удовлетворяет соотношению

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+4f(x)+14x=0.$$

Решите уравнение $4\cdot 8^x=7+2^{f(x)}$. (12 баллов)

Решение

Пусть $t=\dfrac{x+1}{x-1}$. Тогда $x=\dfrac{t+1}{t-1}$, функция $f(t)$ при всех действительных $t\neq 1$ удовлетворяет соотношению $\left(\dfrac{t+1}{t-1}-1\right)f(t)+4f\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)+14\dfrac{t+1}{t-1}=0.$ При всех фиксированных $x\neq 1$ значения $f(x)$ и $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}(x-1)f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+4f(x)+14x=0,\\ \dfrac{2}{x-1}f(x)+4f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+14\dfrac{x+1}{x-1}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=-4f(x)-14x,\\ 2f(x)+4(x-1)f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+14(x+1)=0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$2f(x)-16f(x)-56x+14(x+1)=0\ \Rightarrow\ f(x)=1-3x.$$

Решим заданное уравнение

$$4\cdot 8^x=7+2^{1-3x};\ 4(8^x)^2-7\cdot 8^x-2=0;\ 2(8^x-2)\left(8^x+1/4\right)=0;\ 2^{3x}=2,\ x=1/3.$$

Ответ: $1/3$.

2. Найдите наибольшее натуральное число $n,$ для которого верно неравенство

$$(1^3+2^3+\dots+n^3)-106(1+2+\dots+n)+105\leq 0.$$

(16 баллов)

Решение. $1+2+\dots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}.$ Вычислим сумму $1^2+2^2+\dots+n^2$:

$$1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3=1+\sum_{k=1}^{n}(1+k)^3=1+\sum_{k=1}^{n}(1+3k+3k^2+k^3)=1+n+\frac{3(n+1)n}{2}+3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1-n-\frac{3(n+1)n}{2},\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Вычислим сумму $1^3+2^3+\dots+n^3$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^4=1+\sum_{k=1}^{n}(1+k)^4=1+\sum_{k=1}^{n}(1+4k+6k^2+4k^3+k^4)=1+n+\frac{4(n+1)n}{2}+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^4,$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-1-n-\frac{4(n+1)n}{2}-n(n+1)(2n+1)=(n+1)((n+1)^3-1-2n-2n^2-n),$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Тогда $(1^3+2^3+\dots+n^3)-106(1+2+\dots n)+105\leq 0\ \Leftrightarrow$

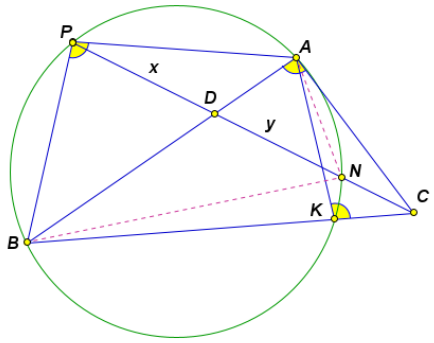
$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}-106\frac{n(n+1)}{2}+105\leq 0,\ \left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}-105\right)\leq 0,\ n^2+n-210\leq 0,$$

$(n+15)(n-14)\leq 0,$ $n=14.$

Ответ: 14.

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 9\sqrt{2}/2,\ BK = 9,\ KC = 3.$ Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и точку D, лежащую на стороне $AB,$ проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP > CD$. Найдите $DP,$ если $\angle APB = \angle BAC,$ CD – биссектриса треугольника $ABC.$ (16 баллов)

Решение.



1) $\angle APB = \angle BAC,\ \angle APB = \angle AKC,\ \angle AKC = \angle BAC,$ $\angle KAC = \angle ABC.$ Отрезок AC является отрезком касательной к окружности.

$\Delta ABC \approx \Delta AKC \quad \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB\sqrt{2}}{9} = \frac{AC}{3} = \frac{12}{AC} \quad \Rightarrow$$

$AC = 6, \quad AB = 9\sqrt{2}.$

2) CD - биссектриса $\Rightarrow$ $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{2}$ и $AD = 3\sqrt{2},$ $DB = 6\sqrt{2},$ имеем

$CD^2 = AC \cdot CB - AD \cdot DB = 72 - 3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 36,\ CD = 6.$

3) Пусть $DP = x$, $DN = y$ (N - точка пересечения прямой CD с окружностью, $N \ne P$). Четырехугольник $ANBP$ вписан в окружность $\Rightarrow$ $AD \cdot DB = PD \cdot DN,$ $36 = xy.$ По свойствам касательных и секущих к окружности имеем $CN \cdot CP = AC^2,\ (CD - y) \cdot (CD + x) = AC^2,$ $(6 - y) \cdot (6 + x) = 36,\ 6(x - y) = xy.$

4) Решаем систему уравнений $36 = xy,\quad 6(x - y) = xy \quad \Rightarrow x = y + 6 \Rightarrow \quad y^2 + 6y - 36 = 0,$ $y = -3 + 3\sqrt{5},\ DP = x = 3 + 3\sqrt{5}.$

Ответ: $3 + 3\sqrt{5}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 7a - 30\cos t + 3 \le 0, \\ 5\sin t + a + \dfrac{1}{2} + \dfrac{|\cos t|}{2\cos t} + \dfrac{|5\cos t - 4|}{5\cos t - 4} = 0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра a. (16 баллов)

Решение. Замена: $x = 5\cos t,\ y = 5\sin t, \quad x^2 + y^2 = 5.$

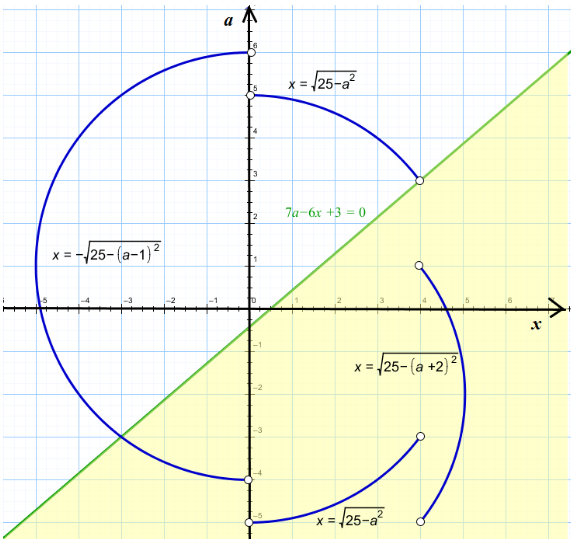
Имеем
$$\begin{cases} 7a - 6x + 3 \le 0, \\ y + a + \dfrac{1}{2} + \dfrac{|x|}{2x} + \dfrac{|x - 4|}{x - 4} = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$
Система распадается на совокупность 3 систем.

1) $\begin{cases} 7a - 6x + 3 \le 0, \\ x > 4,\ y = -a - 2, \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a - 6x + 3 \le 0, \\ x > 4,\ y = -a - 2, \\ x^2 + (a + 2)^2 = 25. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7a - 6x + 3 \le 0, \\ 0 < x < 4,\ y = -a, \\ x^2 + y^2 = 25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a - 6x + 3 \le 0, \\ 0 < x < 4,\ y = -a, \\ x^2 + a^2 = 25. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7a-6x+3\le 0, \\ x<0,\ y=-a+1, \\ x^2+y^2=25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a-6x+3\le 0, \\ x<0,\ y=-a+1, \\ x^2+(a-1)^2=25. \end{cases}$

В системе координат Oxa изобразим решение системы $\begin{cases} 7a-6x+3\le 0, \\ \left[\begin{array}{l} x>4,\ x^2+(a+2)^2=25, \\ 0<x<4,\ x^2+a^2=25, \\ x<0,\ x^2+(a-1)^2=25. \end{array}\right. \end{cases}$



1) Имеем решение $x=\sqrt{25-(a+2)^2}$ при $a\in(-5;1)$.

Тогда $\cos t=\sqrt{1-((a+2)/5)^2}$, $y=-a-2$, $\sin t=-(a+2)/5$, и $t=-\arcsin((a+2)/5)+2\pi n,$ $n\in Z$. При записи ответа через arccos нужно учитывать знаки $\sin t=-(a+2)/5$, т.е. при $a\in(-5;-2]$ имеем $t=\arccos\sqrt{1-((a+2)/5)^2}+2\pi n,$ $n\in Z$, а при $a\in(-2;1)$ имеем $t=-\arccos\sqrt{1-((a+2)/5)^2}+2\pi n,$ $n\in Z$.

2) Имеем решение $x=\sqrt{25-a^2}$ при $a\in(-5;-3)$. Тогда $\cos t=\sqrt{1-(a/5)^2}$, $y=-a,$ $\sin t=-a/5$, и $t=-\arcsin(a/5)+2\pi n,$ $n\in Z$, или $t=\arccos\sqrt{1-(a/5)^2}+2\pi n,$ $n\in Z$.

3) Имеем решение $x=-\sqrt{25-(a-1)^2}$ при $a\in(-4;-3]$. Тогда $\cos t=-\sqrt{1-((a-1)/5)^2}$, $y=-a+1,$ $\sin t=-(a-1)/5$, и $t=\pi+\arcsin((a-1)/5)+2\pi n,$ $n\in Z$, или $t=\pi-\arccos\sqrt{1-((a-1)/5)^2}+2\pi n,$ $n\in Z$.

Ответ: $a\in(-5;1)$

1) при $a\in(-5;-4]$ имеем $t_1=-\arcsin((a+2)/5)+2\pi n,$ $t_2=-\arcsin(a/5)+2\pi n,$ $n\in Z$;

2) при $a\in(-4;-3)$ имеем $t_1=-\arcsin((a+2)/5)+2\pi n,$ $t_2=-\arcsin(a/5)+2\pi n,$ $t_3=\pi+\arcsin((a-1)/5)+2\pi n,$ $n\in Z$;

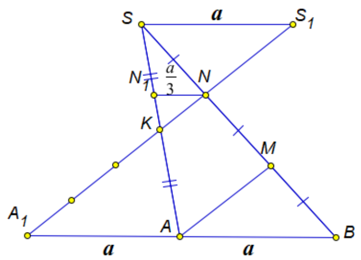
3) при $a=-3$ имеем $t_1=\arcsin(1/5)+2\pi n,$ $t_2=\pi-\arcsin(4/5)+2\pi n,$ $n\in Z$;

4) при $a\in(-3;1)$ имеем $t_1=-\arcsin((a+2)/5)+2\pi n,$ $n\in Z$.

5. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=2$ и $BC=6$. Высотой пирамиды $SABC$ является отрезок SD, где точка D симметрична точке B относительно середины отрезка AC. Точка M принадлежит боковому ребру SB, причем $SM=2MB$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через D параллельно гипотенузе основания AC и отрезку AM, если расстояние от точки B до секущей плоскости равно $\sqrt{14}$. (20 баллов)

Решение. ΔABC - прямоугольный, $\angle B=90°$, $AB=a=2$, $BC=b=6$, $M\in SB$, $SM=2MB$, точка $O\in AC$, $AO=OC$, точка D симметрична B относительно O. Секущая плоскость π проведена через точку D, $\pi\parallel AM$, $\pi\parallel AC$, расстояние ρ от точки B до плоскости π, $\rho=\sqrt{14}$.

1) $D\in A_1C_1$, $A_1C_1\parallel AC$, $A_1A=AB=a$, $C_1C=CB=b$.



$A_1N\parallel AM$, $N\in SB$, $NM=MB$ (AM - средняя линия ΔA_1NB),

$SN=\frac{1}{3}SB.$

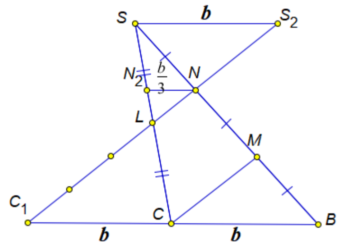
$\Delta SS_1N\sim\Delta A_1BN\Rightarrow SS_1=a$, $\Delta SS_1K\sim\Delta AA_1K\Rightarrow SK=KA$,

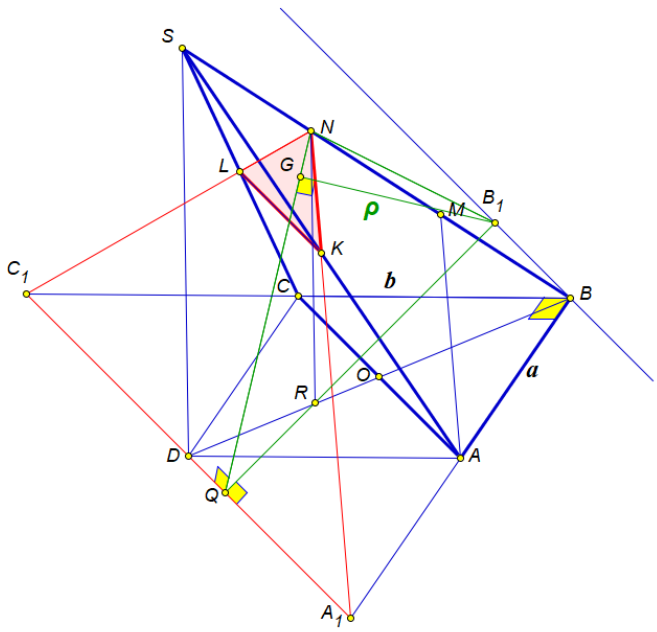
$\Delta N_1NK\sim\Delta A_1AK\Rightarrow\frac{KN}{A_1K}=\frac{1}{3}$, $KN=\frac{1}{4}A_1N.$

Аналогично, $LN=\frac{1}{4}C_1N.$

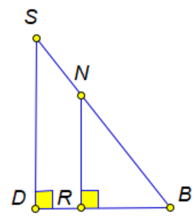
Плоскость π содержит ΔA_1NC_1, сечение – треугольник $\Delta KNL.$

2) Для площадей имеем соотношение $S_{\Delta KNL}=\frac{1}{16}S_{\Delta A_1NC_1}.$





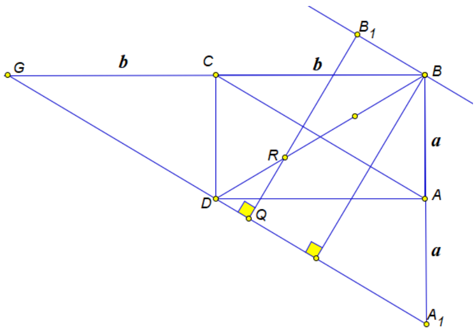
3) $NR\parallel CD$, $DR=\frac{1}{3}DB=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}.$



4) $QB_1\perp CA$, $R\in QB_1$, $CA\parallel C_1A_1\parallel BB_1$ (через R проводим прямую $QB_1\perp CA$).

По теореме о 3 перпендикулярах $NQ\perp C_1A_1$ $\Rightarrow$

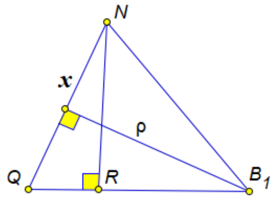
$S_{\Delta A_1NC_1}=\frac{1}{2}A_1C_1\cdot NQ=AC\cdot NQ=NQ\sqrt{a^2+b^2}$, $S_{\Delta KNL}=\frac{1}{16}NQ\sqrt{a^2+b^2}.$



5) Найдем $NQ.$ Поскольку $AC \parallel BB_1 \Rightarrow BB_1 \parallel \pi,$ и расстояние ρ от точки B до плоскости π равно расстоянию от точки B_1 до плоскости π. Длина отрезка QB_1 равна высоте треугольника ΔA_1BC_1, $QB_1 = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ QR = \dfrac{2ab}{3\sqrt{a^2+b^2}}.$ Имеем $QN \cdot \rho = QB_1 \cdot NR,\ NR = \sqrt{QN^2 - QR^2}.$ Пусть $QN = x.$ Тогда

$$x\rho = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{x^2 - \frac{4a^2b^2}{9(a^2+b^2)}} \Rightarrow x^2\rho^2 = \frac{4a^2b^2}{9(a^2+b^2)^2}(9x^2(a^2+b^2) - 4a^2b^2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{4a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{4a^2b^2 - \rho^2(a^2+b^2)}} \Rightarrow$$



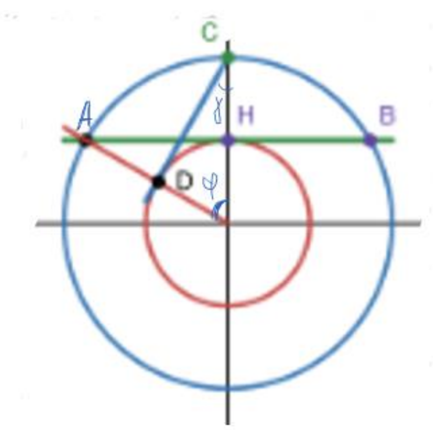
$$S_{\Delta KNL} = \frac{a^2b^2}{12\sqrt{4a^2b^2 - \rho^2(a^2+b^2)}} = \frac{2^2 6^2}{12\sqrt{4\cdot 2^2 6^2 - 14(2^2+6^2)}} = 3.$$

Ответ: 3.

6. <u>Ситуационная задача.</u>

Искусственный спутник (ИСЗ) движется по круговой орбите вокруг Земли (имеет форму шара) на высоте *H*, равной радиусу Земли *R* = 6372 *км*, с периодом обращения *T* = 4 *ч* и постоянной угловой скоростью $w = \dfrac{2\pi}{T}$. Для того, чтобы можно было наблюдать за спутником с поверхности Земли, он должен находиться выше плоскости горизонта. Определите: а) продолжительность наблюдения за спутником (в минутах) от момента его появления над горизонтом до момента захода за горизонт, если траектория ИСЗ проходит ровно над головой наблюдателя; б) плоский угол при вершине конуса обзора поверхности Земли с ИСЗ (в градусах). (20 баллов)

Решение. Пусть наблюдатель находится в точке H. *AB* – линия пересечения плоскости горизонта и плоскости орбиты. Спутник проходит над головой наблюдателя. При движении спутника из точки *A* в точку C по дуге окружности, его проекция на Землю двигается из точки D в точку H. Угловая мера этой дуги *l*=*L/2* равна величине центрального угла. Учитывая симметрию, получим время наблюдения $t = \dfrac{L}{w} = \dfrac{2\varphi T}{2\pi} = \dfrac{\varphi T}{\pi}\Big|_{T=4ч=240 мин} = \dfrac{\varphi \cdot 240}{\pi}$.



Угол находим из прямоугольного треугольника $\cos\varphi = \dfrac{R}{R+H} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$, следовательно,

$$t = \frac{\varphi \cdot 240}{\pi} = \frac{\pi \cdot 240}{3\pi} = 80 \text{ мин.}$$

Угол обзора участка Земли с орбиты равен углу $2\gamma = 2(\dfrac{\pi}{2} - \varphi) = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{3}\pi$ или 60 градусов.

Ответ: а) 80 минут, б) 60 градусов.