Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2021 г.

11 класс

Вариант 1

1. Число b таково, что неравенство $\frac{a_1}{2a_2^2}+\frac{16a_3^4}{a_4^6}\geq b$ выполняется для всех натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, a_4,$ удовлетворяющих неравенствам $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq 100.$
Найдите наибольшее значение b. (12 баллов)

2. Числовая последовательность $a_0, a_1, a_2,\ldots$ такова, что при всех целых неотрицательных числах m и n $(m\geq n)$ выполняется соотношение $a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n}).$ Найдите $a_{2021},$ если $a_1=1.$
(16 баллов)

3. Дан треугольник ABC с углом $B,$ равным $60°.$ На продолжениях сторон $AB,$ CB и медианы BM за точку B взяты точки K, L, N соответственно так, что $BK:AB=3:1,$ $BL:CB=5:1,$ $BN:BM=4:1.$ Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если площадь треугольника KLN равна $6\sqrt{3},$ а расстояние от точки M до точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC равно 1. (16 баллов)

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$3\sqrt[3]{\log_x^7 2}+6\sqrt[3]{\log_x^4 2}+a^2\leq a\log_x^2 2+2a\log_x 2+3a\sqrt[3]{\log_x 2}$$

не выполняется ни для одного x из интервала $(1;2).$ Укажите решения неравенства при найденных значениях параметра a. (16 баллов)

5. На боковых ребрах $TA,$ $TB,$ TC правильной треугольной пирамиды $TABC$ соответственно выбраны точки A_1, B_1, C_1 так, что $\frac{TA}{TA_1}=\frac{TB}{TB_1}=\frac{TC}{TC_1}=3.$ Точка O – центр сферы, описанной около пирамиды $TABC_1.$ Докажите, что прямая TO перпендикулярна плоскости $A_1B_1C.$ Найдите радиус этой сферы и объем пирамиды $TA_1B_1C,$ если сторона основания $AB=1,$ боковое ребро $TA=5/4.$
(20 баллов)

6. <u>Ситуационная задача</u>

Для испытания новой модели моторного катера выбран участок берега моря, представленный на карте прямой линией. Вдоль этого участка берега проходит прямая трасса, на которой расположен командный пункт. В 2 км от него в море по линии, перпендикулярной берегу, на рейде стоит корабль. Моторный катер движется в море так, что расстояние от наблюдателя на корабле до катера в любой момент времени совпадает с расстоянием от катера до движущегося по трассе автомобиля наблюдения. При этом в декартовой системе координат с началом в точке O – командном пункте, осью абсцисс, направленной вдоль трассы по ходу движения автомобиля, и осью ординат, направленной на корабль, абсциссы координат автомобиля и катера в каждый момент времени совпадают.

Укажите координаты катера в этой системе координат через четверть часа с момента начала движения автомобиля от командного пункта, если он двигался все время в одном направлении с постоянной скоростью 40 км/ч. (20 баллов)

Решение варианта 1

1. Число b таково, что неравенство $\frac{a_1}{2a_2^2}+\frac{16a_3^4}{a_4^6}\geq b$ выполняется для всех натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, a_4,$ удовлетворяющих неравенствам $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq 100.$

Найдите наибольшее значение b. (12 баллов)

Решение. Поскольку $1\leq a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq 100,$ то справедливы оценки: $\frac{a_1}{2a_2^2}\geq\frac{1}{2a_2^2}\geq\frac{1}{2a_3^2},$ $\frac{16a_3^4}{a_4^6}\geq\frac{16a_3^4}{100^6}.$ Тогда для любых натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, a_4,$ удовлетворяющих неравенствам $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq 100,$ имеем $\frac{a_1}{2a_2^2}+\frac{16a_3^4}{a_4^6}\geq\frac{1}{2a_3^2}+\frac{16a_3^4}{100^6}.$ Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{2x^2}+\frac{16x^4}{100^6},$ $x\geq 1.$ Найдем минимум функции $f(x)$ для $x\geq 1.$ Имеем $f'(x)=-\frac{1}{x^3}+\frac{64x^3}{100^6}=\frac{64x^6-100^6}{100^6x^3}.$ Уравнение $f'(x)=0$ имеет единственное решение $x=50$, удовлетворяющее условию $x\geq 1.$ Точка $x=50$ является точкой минимума, поскольку производная меняет знак с минуса на плюс, проходя через эту точку. Итак, $f_{\min}=f(50)=0{,}0003,$ и $\frac{a_1}{2a_2^2}+\frac{16a_3^4}{a_4^6}\geq 0{,}0003.$ Докажем, что никакое другое число b, для которого неравенство $\frac{a_1}{2a_2^2}+\frac{16a_3^4}{a_4^6}\geq b$ выполняется для всех натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, a_4,$ удовлетворяющих неравенствам $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq 100,$ не может быть больше $0{,}0003.$ Если положить $a_1=1, a_2=50, a_3=50, a_4=100,$ то $\frac{a_1}{2a_2^2}+\frac{16a_3^4}{a_4^6}=0{,}0003.$

Таким образом, наибольшее значение b равно 0,0003.

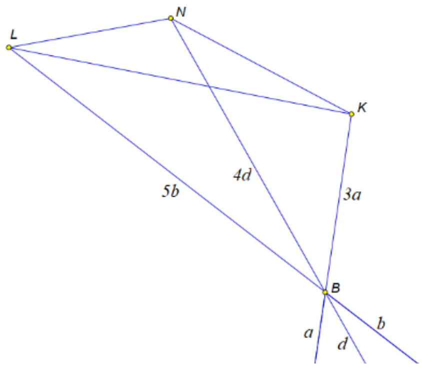
Ответ: 0,0003.

2. Числовая последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что при всех целых неотрицательных числах m и n $(m\geq n)$ выполняется соотношение $a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n}).$ Найдите $a_{2021},$ если $a_1=1.$ (16 баллов)

Решение. Пусть $m=n.$ Тогда $a_{2n}+a_0=\frac{1}{2}(a_{2n}+a_{2n}),$ и $a_0=0.$

Пусть $n=0.$ Тогда $2a_m=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_0),\quad a_{2m}=4a_m.$ Рассмотрим случай $m=n+2.$ Тогда $a_{2(n+1)}+a_2=\frac{1}{2}(a_{2(n+2)}+a_{2n})=\frac{1}{2}(4a_{n+2}+4a_n)=2a_{n+2}+2a_n,$ $a_{2(n+1)}+a_2=4(a_{n+1}+a_1)=4(a_{n+1}+1),$ $2(a_{n+1}+1)=a_{n+2}+a_n,\quad a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2.$ Согласно рекуррентной формуле, имеем $a_0=0,\quad a_1=1,$ $a_2=4,\quad a_3=9,\quad a_4=16,\quad a_5=25,\ldots$ Используя метод математической индукции, докажем, что $a_n=n^2, n=0,1,2,\ldots$ Для начальных n проверили. Предположим, что для некоторого значения n верно равенство $a_n=n^2, a_{n-1}=(n-1)^2.$ Докажем, что $a_{n+1}=(n+1)^2.$ Действительно, $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2=2n^2-(n-1)^2+2=n^2+2n+1=(n+1)^2.$ Отсюда получаем $a_{2021}=2021^2=4084441.$ **Ответ:** 4084441.

3. Дан треугольник ABC с углом $B,$ равным $60°$. На продолжениях сторон $AB,$ CB и медианы BM за точку B взяты точки K, L, N соответственно так, что $BK:AB=3:1,$ $BL:CB=5:1,$ $BN:BM=4:1.$ Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если площадь треугольника KLN равна $6\sqrt{3},$ а расстояние от точки M до точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC равно 1. (16 баллов)



Решение. Выразим площади треугольников $BKN,$ BLN и BLK через площадь треугольника ABC: $AB=a, BC=b, BM=d,$

$$S_{BKN}=\frac{3a\cdot 4d}{2}\sin\angle KBN=12S_{ABM}=6S_{ABC},$$

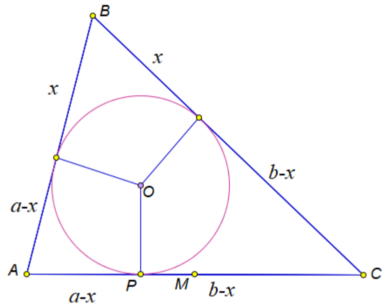
$$S_{BLN}=\frac{5b\cdot 4d}{2}\sin\angle KBN=20S_{CBM}=10S_{ABC},$$

$$S_{BLK}=\frac{3a\cdot 5b}{2}\sin\angle ABC=15S_{ABC}.$$

Тогда

$$S_{KLN}=6S_{ABC}+10S_{ABC}-15S_{ABC}=S_{ABC}=6\sqrt{3},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}ab=6\sqrt{3},\quad ab=24.$$



Пусть P - точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC, $PM=1.$ Обозначим через x – длины отрезков касательных проведенных к вписанной окружности из точки B.

Имеем

$$PM=|PC-MC|=\left|b-x-\frac{a+b-2x}{2}\right|=\frac{|a-b|}{2}=1.$$

Предположим $b>a.$ Тогда $b=a+2,$ и $a(a+2)=24,$ $a^2+2a-24=0,$ $a=4,$ $b=6.$

Найдем AC по теореме косинусов: $AC^2=16+36-24=28, AC=2\sqrt{7}.$ Отсюда получаем $r_{вп}=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{6\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{3}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{3}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$3\sqrt[3]{\log_x^7 2}+6\sqrt[3]{\log_x^4 2}+a^2\le a\log_x^2 2+2a\log_x 2+3a\sqrt[3]{\log_x 2}$$

не выполняется ни для одного x из интервала $(1;\,2).$ Укажите решения неравенства при найденных значениях параметра a. (16 баллов)

Решение. Замена: $t=\log_x 2,$ $t=\frac{1}{\log_2 x},$ $t\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$ $x\in(1;\,2)\Leftrightarrow t\in(1;+\infty).$

Имеем $3\sqrt[3]{t^7}+6\sqrt[3]{t^4}+a^2\le at^2+2at+3a\sqrt[3]{t}$. Необходимо найти все значения параметра a, при которых полученное неравенство не выполняется ни для одного t из промежутка $(1;+\infty).$ Рассмотрим это неравенство как квадратное относительно a.

$a^2-a(t^2+2t+3\sqrt[3]{t})+3\sqrt[3]{t^7}+6\sqrt[3]{t^4}\le 0,$ $a^2-a(t^2+2t+3\sqrt[3]{t})+3\sqrt[3]{t}(t^2+2t)\le 0,$

$(a-t^2-2t)(a-3\sqrt[3]{t})\le 0.$ Решим неравенство графически в системе Ota. Построим графики функций $a=t^2+2t,$ $a=3\sqrt[3]{t}.$ В закрашенной части плоскости выполняется рассматриваемое неравенство. Для $a\le 3$ неравенство не выполняется ни для одного t из промежутка $(1;+\infty).$

Найдем решения неравенства:

1) при $a \in (-\infty;-1]$ имеем $t \in \left(-\infty;\left(\frac{a}{3}\right)^3\right]$;

2) при $a \in (-1;0)$ имеем

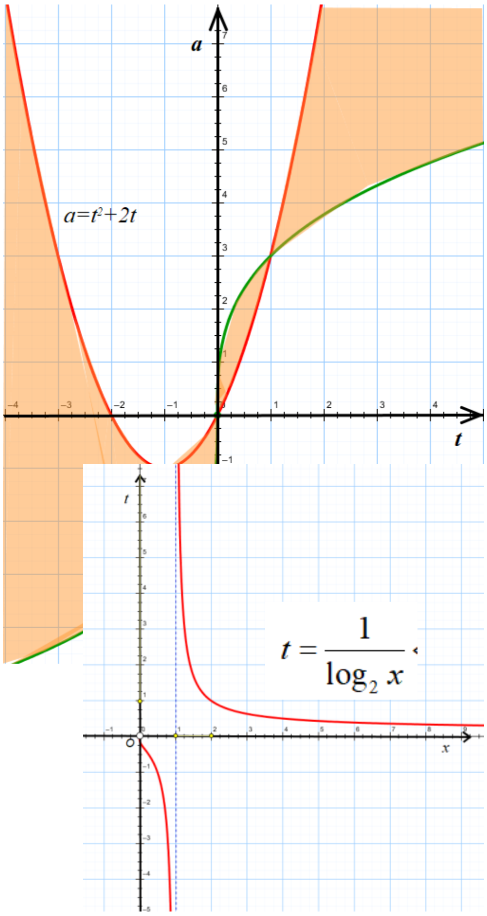
$t \in \left(-\infty;-1-\sqrt{a+1}\right] \cup \left[-1+\sqrt{a+1};\left(\frac{a}{3}\right)^3\right]$;

3) при $a=0$ имеем $t \in (-\infty;-2]$;

4) при $a \in (0;3)$ имеем

$t \in \left(-\infty;-1-\sqrt{a+1}\right] \cup \left[\left(\frac{a}{3}\right)^3;-1+\sqrt{a+1}\right]$;

5) при $a=3$ имеем $t \in (-\infty;-3] \cup \{1\}$. Вернемся к переменному x: $t=\frac{1}{\log_2 x} \Leftrightarrow x=2^{1/t}$.



1) при $a \in (-\infty;-1]$ имеем $x \in \left[2^{(3/a)^3};1\right)$;

2) при $a \in (-1;0)$ имеем

$x \in \left[2^{(3/a)^3};2^{-1/(1-\sqrt{a+1})}\right] \cup \left[2^{-1/(1+\sqrt{a+1})};1\right)$;

3) при $a=0$ имеем $x \in \left[2^{-1/2};1\right)$;

4) при $a \in (0;3)$ имеем

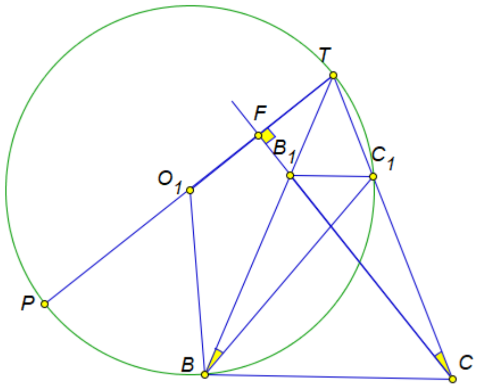
$x \in \left[2^{-1/(1+\sqrt{a+1})};1\right) \cup \left[2^{-1/(1-\sqrt{a+1})};2^{(3/a)^3}\right]$; 5) при $a=3$ имеем $x \in \left[2^{-1/3};1\right) \cup \{2\}$.

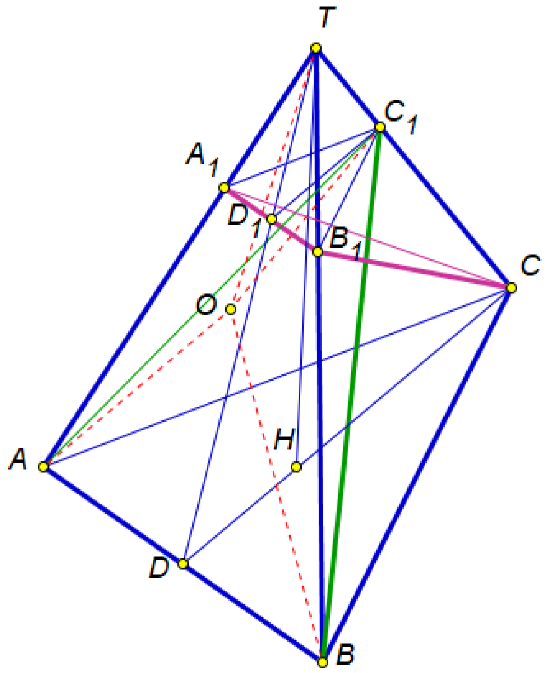
Ответ: $a \in (-\infty;3]$; 1) при $a \in (-\infty;-1]$ имеем $x \in \left[2^{(3/a)^3};1\right)$;
2) при $a \in (-1;0)$ имеем $x \in \left[2^{(3/a)^3};2^{-1/(1-\sqrt{a+1})}\right] \cup \left[2^{-1/(1+\sqrt{a+1})};1\right)$; 3) при $a=0$ имеем $x \in \left[2^{-1/2};1\right)$;
4) при $a \in (0;3)$ имеем $x \in \left[2^{-1/(1+\sqrt{a+1})};1\right) \cup \left[2^{-1/(1-\sqrt{a+1})};2^{(3/a)^3}\right]$; 5) при $a=3$ имеем $x \in \left[2^{-1/3};1\right) \cup \{2\}$.

5. На боковых ребрах $TA,$ $TB,$ TC правильной треугольной пирамиды $TABC$ соответственно выбраны точки A_1, B_1, C_1 так, что $\frac{TA}{TA_1}=\frac{TB}{TB_1}=\frac{TC}{TC_1}=3.$ Точка O – центр сферы, описанной около пирамиды $TABC_1$. Докажите, что прямая TO перпендикулярна плоскости A_1B_1C. Найдите радиус этой сферы и объем пирамиды $TA_1B_1C,$ если сторона основания $AB=1,$ боковое ребро $TA=5/4$.

(20 баллов)

Решение. 1) Докажем, что прямая TO перпендикулярна плоскости A_1B_1C. Точка O лежит в плоскости $TCD,$ D - середина AB. Спроецируем точку O на плоскость $TBC,$ ее проекция O_1 - центр описанной около треугольника TBC_1 окружности. Прямая TO_1 - проекция TO на плоскость TBC. Докажем, что $TO_1 \perp B_1C$.





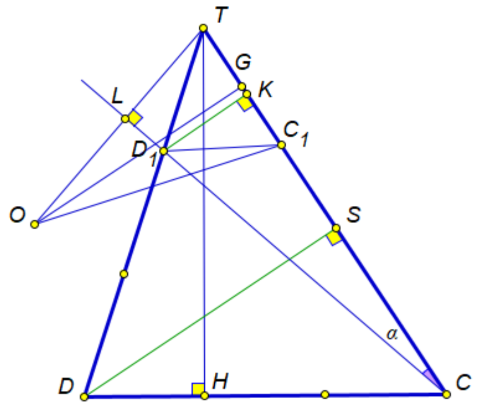
Поскольку $\frac{TA}{TA_1}=\frac{TB}{TB_1}=\frac{TC}{TC_1}=3,$ то $\triangle TB_1C_1 \sim \triangle TBC,$ $B_1C_1 \parallel BC,$ $\angle BC_1T=\angle CB_1T.$ Докажем, что $\angle CB_1T-\angle BTO_1=90°,$ т.е. $\angle TFB_1=90°,$ F – точка пересечения прямых TO_1 и $B_1C.$ По свойству вписанных углов имеем: $\angle CB_1T=\angle BC_1T=\frac{1}{2}(360°-\angle BO_1T)=180°-\frac{\angle BO_1T}{2}.$ Пусть TP - диаметр рассматриваемой окружности. Тогда $\angle BTO_1=\angle BTP=\frac{1}{2}\angle BO_1P=\frac{1}{2}(180°-\angle BO_1T)=90°-\frac{\angle BO_1T}{2}.$

$$\angle CB_1T-\angle BTO_1=\left(180°-\frac{\angle BO_1T}{2}\right)-\left(90°-\frac{\angle BO_1T}{2}\right)=90°.$$

Таким образом, $TO_1 \perp B_1C.$

Аналогично доказывается, что проекция TO на плоскость TAC перпендикулярна A_1C. Согласно теореме о трех перпендикулярах, TO также будет перпендикулярна двум пересекающимся прямым B_1C и A_1C, лежащим в плоскости $A_1B_1C,$ следовательно, $TO \perp A_1B_1C.$

2) Обозначим через a длину стороны основания пирамиды $TABC$, $AB=a=1.$ Обозначим через b длину бокового ребра пирамиды $TABC$, $TC=b=5/4.$ Пусть TH - высота пирамиды $TABC$. Тогда $TH=\sqrt{b^2-a^2/3}.$ В основании пирамиды TA_1B_1C лежит равнобедренный треугольник A_1B_1C, $A_1B_1=a/3,$ D_1C - его высота, D_1 - середина $A_1B_1.$ Высота TL пирамиды $TA_1B_1C,$ проведенная из вершины T лежит на прямой $TO.$ Для вычисления объема пирамиды TA_1B_1C нужно найти D_1C и TL.



На боковом ребре TC отметим точки K и S так, что $D_1K \perp TC,$ $DS \perp TC.$

$$DS=\frac{DC\cdot TH}{TC}=\frac{\sqrt{3}a/2\cdot\sqrt{b^2-a^2/3}}{b}=\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{2b},$$

$$D_1K=\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{6b},\ \cos\angle HCT=\frac{\sqrt{3}a}{3b},$$

$$KC_1=D_1C_1\cos\angle HCT=\frac{\sqrt{3}a}{6}\frac{\sqrt{3}a}{3b}=\frac{a^2}{6b},$$

$$KC=\frac{a^2}{6b}+\frac{2b}{3}=\frac{a^2+4b^2}{6b}.$$

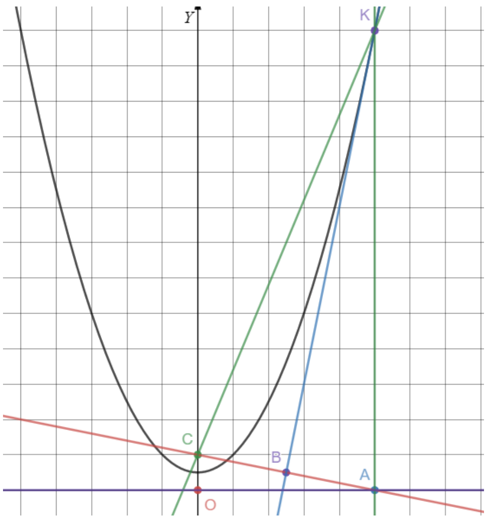
Пусть $\angle D_1CT=\alpha.$

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{D_1K}{KC} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{a^2 + 4b^2}$, $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{b\sqrt{11a^2 + 16b^2}}$, $TL = b\sin\alpha = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{11a^2 + 16b^2}}$,

$D_1C = \sqrt{D_1K^2 + KC^2} = \frac{\sqrt{11a^2 + 16b^2}}{6}$. Итак, объем пирамиды TA_1B_1C вычисляется по формуле $V_{TA_1B_1C} = \frac{1}{3}\cdot\frac{A_1B_1 \cdot D_1C}{2}\cdot TL = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{108} = \frac{\sqrt{59}}{432}$. $R = OT = \frac{TC_1}{2\sin\alpha} = \frac{b^2\sqrt{11a^2 + 16b^2}}{6a\sqrt{3b^2 - a^2}} = \frac{25}{4\sqrt{59}}$.

Ответ: $V_{TA_1B_1C} = \frac{\sqrt{59}}{432}$, $R = \frac{25}{4\sqrt{59}}$.

6. <u>Ситуационная задача.</u> Для испытания новой модели моторного катера выбран участок берега моря, представленный на карте прямой линией. Вдоль этого участка берега проходит прямая трасса, на которой расположен командный пункт. В 2 км от него в море по линии, перпендикулярной берегу, на рейде стоит корабль. Моторный катер движется в море так, что расстояние от наблюдателя на корабле до катера в любой момент времени совпадает с расстоянием от катера до движущегося по трассе автомобиля наблюдения. При этом в декартовой системе координат с началом в точке O – командном пункте, осью абсцисс, направленной вдоль трассы по ходу движения автомобиля, и осью ординат, направленной на корабль, абсциссы координат автомобиля и катера в каждый момент времени совпадают.
Укажите координаты катера в этой системе координат через четверть часа с момента начала движения автомобиля от командного пункта, если он двигался все время в одном направлении с постоянной скоростью 40 км/ч. (20 баллов)



Решение. Введем систему координат с началом в точке O, ось OX совместим с береговой линией, направив по ходу движения автомобиля. Расположение автомобиля пометим точкой A. Соединив точку O с точкой, в которой находится корабль (точка C), и продлив линию за точку C, получим ось OY. Пусть единичный отрезок в системе координат соответствует 1 км на местности.
Т.к. расстояние от наблюдателя на корабле (точка C) до катера (точка K), в любой момент времени совпадало с расстоянием от катера до трассы, и абсциссы автомобиля и катера совпадают (точка A на оси OX), то треугольник CKA – равнобедренный, $CK=AK$. Координаты точки A в построенной системе координат через четверть часа будут (10; 0), координаты точки C (0; 2). Необходимо найти координаты точки K. Точки, равноудаленные от концов отрезка, лежат на его серединном перпендикуляре. Уравнение прямой AC: $y=2-x/5$, точка B – середина отрезка AC, имеет координаты (5;1), тогда уравнение прямой BK: $y=5x-24$, следовательно, точка K – пересечение прямых BK и AK, имеет координаты (10; 26).

Ответ: (10, 26).