Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2021 г.

10 класс

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y^2 - 3x = 4x^3y, \\ y^2 + 4x^2y^3 = 4x. \end{cases}$ (12 баллов)

2. Число b таково, что неравенство $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_5}{a_6} + \frac{a_7}{a_8} \geq b$ выполняется для всех натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8,$ удовлетворяющих неравенствам $a_n \leq a_{n+1}$, $n = 1, \ldots, 8, a_8 \leq 81.$ Найдите наибольшее значение b. (16 баллов)

3. Дан треугольник ABC с углом $B,$ равным $60°.$ На продолжениях сторон $AB,$ CB за точку B взяты точки K, L соответственно так, что $BK : AB = 2:1,$ $BL : CB = 3:1.$ На продолжении медианы BM за точку M взята точка $N,$ причем $BN : BM = 6:1.$ Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если площадь треугольника KLN равна $126\sqrt{3},$ а расстояние от точки M до точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC равно 1.

(16 баллов)

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\frac{3}{(x-1)^3} + \frac{6-a}{(x-1)^2} - \frac{5a}{x-1} + a^2 \leq 0$$

не выполняется ни для одного x из интервала $(1; 2).$ Укажите решения неравенства при найденных значениях параметра a. (16 баллов)

5. Боковые ребра $TA,$ $TB,$ и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны, ребро TA наклонено к плоскости основания ABC под углом $30°.$ Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, косинус угла AHB равен $-1/3$. Найдите угол между ребром TC и плоскостью $ABC.$

(20 баллов)

6. <u>Ситуационная задача</u>

Для производственного процесса необходимо изготовить лекало из металлической пластины-заготовки, которая имеет форму прямоугольной трапеции. В заготовке имеется технологическое отверстие, которое можно принять за точку, расположенную в 2 см от меньшей боковой стороны, имеющей длину 4,5 см, и в 0,5 см от большего основания трапеции. Длины оснований трапеции равны 1,5 см и 6 см. Требуется провести на пластине кривую линию разреза так, чтобы расстояние от любой точки этой линии до большего основания трапеции было бы равно расстоянию от этой точки до технологического отверстия. Определите, в каком отношении линия разреза делит каждую из боковых сторон пластины. (20 баллов)

Решение варианта 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y^2-3x=4x^3y, \\ y^2+4x^2y^3=4x. \end{cases}$ (12 баллов)

Решение

1) $x=0 \Rightarrow y=0, \quad y=0 \Rightarrow x=0,$ (0; 0) – решение;

2) $x\neq 0,\ y\neq 0.$ Первое уравнение умножим на $y^2,$ второе - на $x,$ сложим полученные уравнения:
$2y^4-3xy^2+xy^2+4x^3y^3=4x^3y^3+4x^2 \Rightarrow$ $2y^4-2xy^2=4x^2 \Rightarrow 2x^2+xy^2-y^4=0 \Rightarrow$
$2x^2-xy^2+2xy^2-y^4=0 \Rightarrow x(2x-y^2)+y^2(2x-y^2)=0 \Rightarrow (2x-y^2)(x+y^2)=0$.

2.1) $x=y^2/2,\ \ y^2-y^7=0, \quad y=1,\ x=1/2.$

2.2) $x=-y^2,$ $5y^2+4y^7=0, \quad y=-\sqrt[5]{\frac{5}{4}},\ x=-\sqrt[5]{\frac{25}{16}}.$

Ответ: $(0;0), \quad (1/2;1), \quad \left(-\sqrt[5]{\frac{25}{16}};-\sqrt[5]{\frac{5}{4}}\right).$

2. Число b таково, что неравенство $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_5}{a_6}+\frac{a_7}{a_8}\geq b$ выполняется для всех натуральных чисел $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,$ удовлетворяющих неравенствам $a_n\leq a_{n+1}$, $n=1,\ldots,8,\ a_8\leq 81.$ Найдите наибольшее значение b. (16 баллов)

Решение Поскольку $1\leq a_n\leq a_{n+1}$, $n=1,\ldots,8,\ a_8\leq 81,$ то справедливы оценки: $\frac{a_1}{a_2}\geq\frac{1}{a_3},$ $\frac{a_5}{a_6}\geq\frac{a_4}{a_7},\ \ \frac{a_7}{a_8}\geq\frac{a_7}{81}.$ Тогда для любых натуральных чисел $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,$ удовлетворяющих неравенствам $a_n\leq a_{n+1}$, $n=1,\ldots,8,\ a_8\leq 81,$ имеем

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_5}{a_6}+\frac{a_7}{a_8}\geq\frac{1}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_4}{a_7}+\frac{a_7}{81}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_4}}+2\sqrt{\frac{a_4}{a_7}\cdot\frac{a_7}{81}}\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{a_4}\cdot\frac{a_4}{81}}=\frac{4}{3} \quad (a+b\geq 2\sqrt{ab}),$$

и $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_5}{a_6}+\frac{a_7}{a_8}\geq\frac{4}{3}$. Докажем, что никакое другое число b, для которого неравенство $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_5}{a_6}+\frac{a_7}{a_8}\geq b$ выполняется для всех натуральных чисел $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,$ удовлетворяющих неравенствам $a_n\leq a_{n+1}$, $n=1,\ldots,8,\ a_8\leq 81,$ не может быть больше $\frac{4}{3}.$ Если положить $a_1=1,\ a_2=a_3=3,\ a_4=a_5=9,\ a_6=a_7=27,\ a_8=81,$ то $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_3}{a_4}+\frac{a_5}{a_6}+\frac{a_7}{a_8}=\frac{4}{3}.$

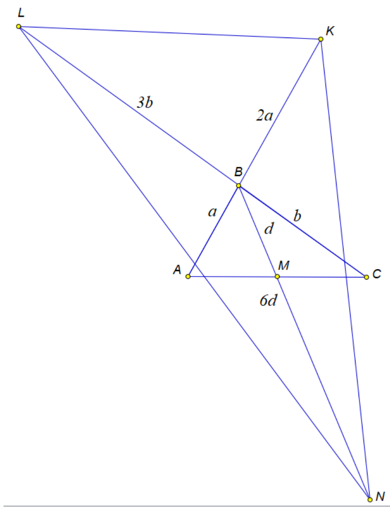
Таким образом, наибольшее значение b равно $\frac{4}{3}.$

Ответ: $\frac{4}{3}.$

3. Дан треугольник ABC с углом $B,$ равным $60°$. На продолжениях сторон $AB,$ CB за точку B взяты точки K, L соответственно так, что $BK:AB=2:1,$ $BL:CB=3:1.$ На продолжении медианы BM за точку M взята точка $N,$ причем $BN:BM=6:1.$ Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если площадь треугольника KLN равна $126\sqrt{3},$ а расстояние от точки M до точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC равно 1.

(16 баллов)

Решение. Выразим площади треугольников $BKN,$ BLN и BLK через площадь треугольника ABC: $AB=a, BC=b, BM=d,$



$$S_{BKN}=\frac{2a\cdot 6d}{2}\sin\angle KBN=12S_{ABM}=6S_{ABC},$$

$$S_{BLN}=\frac{3b\cdot 6d}{2}\sin\angle KBN=18S_{CBM}=9S_{ABC},$$

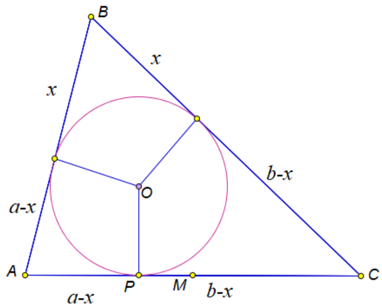
$$S_{BLK}=\frac{2a\cdot 3b}{2}\sin\angle ABC=6S_{ABC}.$$

Тогда

$$S_{KLN}=6S_{ABC}+9S_{ABC}+6S_{ABC}=21S_{ABC}=126\sqrt{3},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}ab=6\sqrt{3},\quad ab=24.$$

Пусть P - точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC, $PM=1.$ Обозначим через x – длины отрезков касательных проведенных к вписанной окружности из точки B.



Имеем $$PM=|PC-MC|=\left|b-x-\frac{a+b-2x}{2}\right|=\frac{|a-b|}{2}=1.$$

Предположим $b>a.$ Тогда $b=a+2,$ и $a(a+2)=24,$ $a^2+2a-24=0,$ $a=4,$ $b=6.$

Найдем AC по теореме косинусов: $AC^2=16+36-24=28, AC=2\sqrt{7}.$ Отсюда получаем

$$R_{on}=\frac{AC}{2\sin 60°}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{6-a}{(x-1)^2}-\frac{5a}{x-1}+a^2\le 0$$

не выполняется ни для одного x из интервала $(1;2).$ Укажите решения неравенства при найденных значениях параметра a.

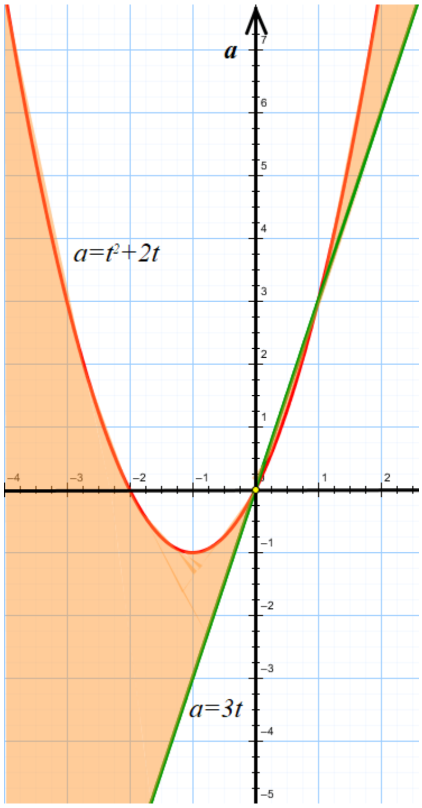
(16 баллов)

Решение. Замена: $t=\frac{1}{x-1},$ $t\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$ $x\in(1;2)\Leftrightarrow t\in(1;+\infty).$

Имеем $3t^3+(6-a)t^2-5at+a^2\le 0$. Необходимо найти все значения параметра a, при которых полученное неравенство не выполняется ни для одного t из промежутка $(1;+\infty).$ Рассмотрим это неравенство как квадратное относительно a.

$a^2-a(t^2+5t)+3t^3+6t^2\le 0,$ $a^2-a(t^2+2t+3t)+3t(t^2+2t)\le 0,$

$(a-t^2-2t)(a-3t)\le 0.$ Решим неравенство графически в системе Ota. Построим графики функций $a=t^2+2t, \quad a=3t.$ В закрашенной части плоскости выполняется рассматриваемое неравенство. Для $a\le 3$ неравенство не выполняется ни для одного t из промежутка $(1;+\infty)$.



Найдем решения неравенства:

1) при $a\in(-\infty;-1]$ имеем $t\in\left(-\infty;\frac{a}{3}\right]$;

2) при $a\in(-1;0)$ имеем

$t\in\left(-\infty;-1-\sqrt{a+1}\right]\cup\left[-1+\sqrt{a+1};\frac{a}{3}\right]$;

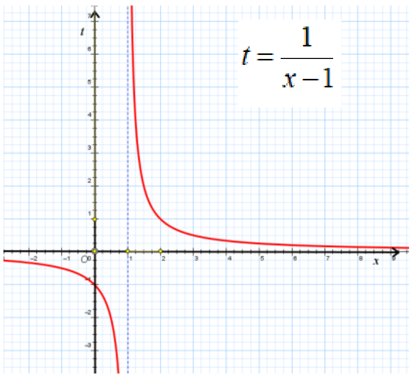
3) при $a=0$ имеем $t\in(-\infty;-2]$;

4) при $a\in(0;3)$ имеем

$t\in\left(-\infty;-1-\sqrt{a+1}\right]\cup\left[\frac{a}{3};-1+\sqrt{a+1}\right]$;

5) при $a=3$ имеем $t\in(-\infty;-3]\cup\{1\}$. Вернемся к переменному x:

$t=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{t}+1.$



1) при $a\in(-\infty;-1]$ имеем $x\in\left[\frac{3}{a}+1;1\right)$;

2) при $a\in(-1;0)$ имеем

$x\in\left[\frac{3}{a}+1;1-\frac{1}{1-\sqrt{a+1}}\right]\cup\left[1-\frac{1}{1+\sqrt{a+1}};1\right)$;

3) при $a=0$ имеем $x\in[1/2;1)$;

4) при $a\in(0;3)$ имеем

$x\in\left[1-\frac{1}{1+\sqrt{a+1}};1\right)\cup\left[1-\frac{1}{1-\sqrt{a+1}};\frac{3}{a}+1\right]$; 5) при $a=3$ имеем $x\in[2/3;1)\cup\{2\}$.

Ответ: $a\in(-\infty;3]$;

1) при $a\in(-\infty;-1]$ имеем $x\in\left[\frac{3}{a}+1;1\right)$;

2) при $a\in(-1;0)$ имеем $x\in\left[\frac{3}{a}+1;1-\frac{1}{1-\sqrt{a+1}}\right]\cup\left[1-\frac{1}{1+\sqrt{a+1}};1\right)$;

3) при $a=0$ имеем $x\in[1/2;1)$;

4) при $a\in(0;3)$ имеем $x\in\left[1-\frac{1}{1+\sqrt{a+1}};1\right)\cup\left[1-\frac{1}{1-\sqrt{a+1}};\frac{3}{a}+1\right]$;

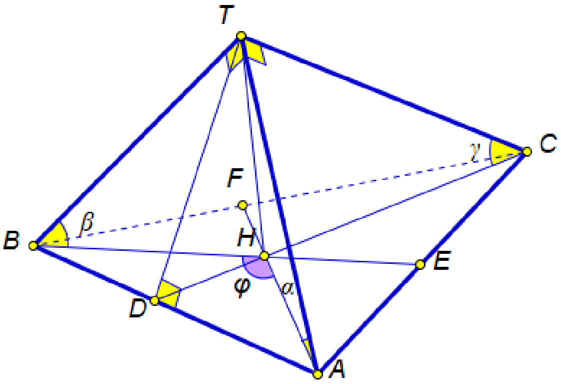
5) при $a=3$ имеем $x\in[2/3;1)\cup\{2\}$.

5. Боковые ребра $TA,$ $TB,$ и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны, ребро TA наклонено к плоскости основания ABC под углом $30°$. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, косинус угла AHB равен $-1/3$. Найдите угол между ребром TC и плоскостью ABC. (20 баллов)

Решение. Боковые ребра $TA,\ TB,$ и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны и наклонены к плоскости основания ABC под углами α, β и γ соответственно, $\alpha = 30°$. Пусть H - точка пересечения высот треугольника ABC, угол AHB равен $\varphi,$ $\cos\varphi = -1/3.$

Докажем, что а) $\sin\varphi = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},$ б) $\cos\varphi = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

$TD \perp AB,$ TD - проекция CD на плоскость ATB, поскольку $TC \perp ATB.$ По теореме о 3 перпендикулярах $CD \perp AB.$ $TH \perp CD,$ для остальных высот треугольника ACB рассуждения аналогичные. H - точка пересечения высот треугольника ABC. TH - высота пирамиды. H - точка пересечения высот треугольника



$S_{ATB} = S_{AHB}/\sin\gamma$,

$$S_{ATB} = \frac{AT\cdot BT}{2} = \frac{AH\cdot BH}{2\cos\alpha\cos\beta},$$

$$S_{AHB} = \frac{AH\cdot BH\sin\varphi}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta},$$

$$\cos\varphi = \frac{AH^2 + BH^2 - AB^2}{2AH\cdot BH} = \frac{TA^2 - TH^2 + TB^2 - TH^2 - AB^2}{2AH\cdot BH} = \frac{-2TH^2}{2AH\cdot BH} = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Поскольку $\cos\varphi = -1/3,\ \alpha = 30°,$ то $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 30°.$

$$\sin\gamma = \sin\varphi\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \gamma = 45°.$$

Ответ: $45°.$

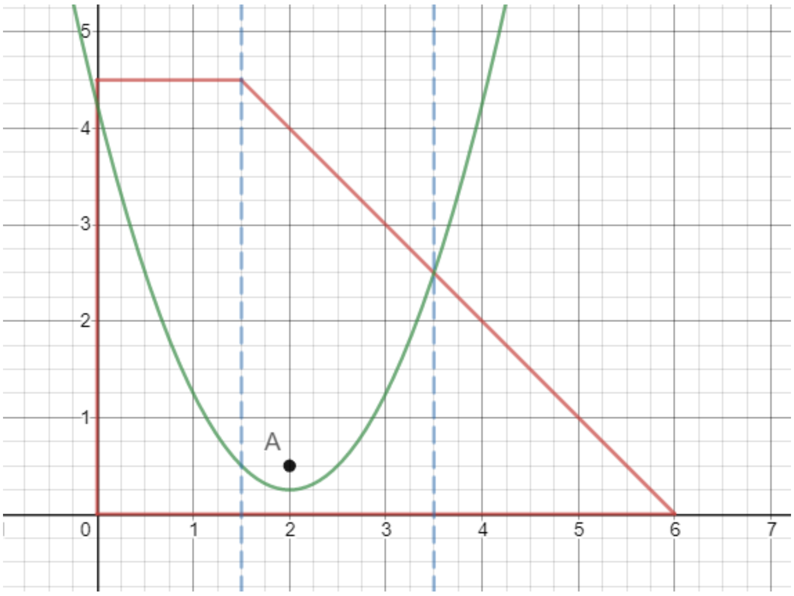
6. <u>Ситуационная задача.</u>

Для производственного процесса необходимо изготовить лекало из металлической пластины-заготовки, которая имеет форму прямоугольной трапеции. В заготовке имеется технологическое отверстие, которое можно принять за точку, расположенную в 2 см от меньшей боковой стороны, имеющей длину 4,5 см, и в 0,5 см от большего основания трапеции. Длины оснований трапеции равны 1,5 см и 6 см. Требуется провести на пластине кривую линию разреза так, чтобы расстояние от любой точки этой линии до большего основания трапеции было бы равно расстоянию от этой точки до технологического отверстия.

Определите, в каком отношении линия разреза делит каждую из боковых сторон пластины.

(20 баллов)

Решение. Введем систему координат с центром в вершине прямого угла при большем основании, направим оси вдоль большего основания и меньшей боковой стороне. В этой СК технологическое отверстие имеет координаты (2; 0.5). Кривая разреза имеет форму параболы $y = \frac{1}{4} + (x-2)^2.$



Меньшая боковая сторона и большая боковая сторона задаются уравнениями $x = 0, \quad y = 6 - x.$ Найдем координаты точек пересечения кривой и прямых:

1) $\begin{cases} y = \frac{1}{4} + (x-2)^2, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow (0; \frac{17}{4}),$

2) $\begin{cases} y = \frac{1}{4} + (x-2)^2, \\ y = 6 - x, \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + x - 6 + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x - \frac{7}{4} = 0 \quad \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

Нас устраивает только положительный корень, далее, используя теорему Фалеса, получаем, большая боковая сторона делится в том же отношении, что и отношение соответствующих отрезков по оси *x*.

Следовательно, меньшая боковая сторона делится в отношении 17:1, большая – 5:4, если отсчитывать от большего основания трапеции.

Ответ: 17:1, 5:4.