Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2020 г.
11 класс
Вариант 2

1. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 км и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 км. Сколько автобусов при этом могло его обогнать? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.) В ответ напишите сумму всех возможных решений. (5 баллов)

2. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y=4(1-|1-|x-2||), \\ z=4(1-|1-|y-2||), \\ u=4(1-|1-|z-2||), \\ x=4(1-|1-|u-2||)? \end{cases}$$

(5 баллов)

3. Известно, что $x_1+2\,x_2+3x_3+\cdots+\,nx_n=10,$ где $x_k\geq 0$ при любых $k=1,2,\ldots,n.$ Какое наибольшее значение может принимать величина

$$2x_1x_2+\ 6x_2x_3+12x_3x_4+\cdots+(n^2-n)x_{n-1}x_n?$$

(6 баллов)

4. Имеются по два одинаковых треугольных стекла 9 цветов со всеми сторонами по 50 см. Сколькими способами можно вставить 4 стекла в треугольную раму со сторонами по 1 м так, чтобы стёкла, имеющие общую сторону, различались цветом? (12 баллов)

5. С каким остатком число 12345678 в степени 456 делится на 11 ? (12 баллов)

6. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=0,25\left(x^2+6x+1\right)$; две из них проходят через точку $A\left(-1;-2\right)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC? (12 баллов)

7. Медиана *BD* треугольника *ABC* равна $\sqrt{785}$. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная стороне *AB*. На этой прямой лежит точка *O*, $\angle BOC=90°$. Окружность с центром в точке *O*, проходящая через точку *A*, пересекает прямую *BO* в точках *M* и *N*. Найдите площадь треугольника *OAC*, если $MC=10\sqrt{17},$ тангенс угла *CAB* равен $7/9.$ (16 баллов)

8. При каком максимальном значении параметра $a\ \ (a\neq 0)$ уравнение

$$(\cos x+a)^7-(\cos^7 x+a^7)=\frac{7}{2}a(\cos^2 x+a\cos x+a^2)^2$$

имеет более двух корней на интервале $(0;2\pi)$? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра. В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на π. (16 баллов)

9. Основанием пирамиды *SABC* служит равнобедренный треугольник *ABC*, причем $AB=BC=9$, $AC=12$. Высотой пирамиды *SABC* является отрезок *SO*, где *O* – точка пересечения прямой, проходящей через вершину *B* параллельно стороне *AC*, и прямой, проходящей через *C* перпендикулярно стороне *AC*. Расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC*, равно $4\sqrt{5}/5$. Найдите квадрат объема пирамиды *SABC*. (16 баллов)

Решение варианта 2

1. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 км и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 км. Сколько автобусов при этом могло его обогнать? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.) В ответ напишите сумму всех возможных решений. (5 баллов)

Решение

Пусть T – интервалы времени, через которые идут автобусы.

$$1)\ 5T \le 4,\quad 7T > 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{7} < T \le \frac{4}{5}$$

$$2)\ 7T \le 7,\quad 9T > 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{9} < T \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{7}{9} < T \le \frac{4}{5}$$

$$(n-1)T \le 17 < (n+1)T \Rightarrow \frac{17}{T} - 1 < n \le \frac{17}{T} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{17\cdot 5}{4} - 1 \le \frac{17}{T} - 1 < n \le \frac{17}{T} + 1 < \frac{17\cdot 9}{7} + 1 \Rightarrow$$

$$20{,}25 < n < 22\frac{6}{7} \Rightarrow n = 21;\ 22$$

Ответ: 43.

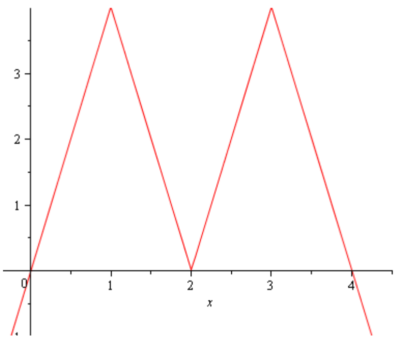
2. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = 4(1-|1-|x-2||), \\ z = 4(1-|1-|y-2||), \\ u = 4(1-|1-|z-2||), \\ x = 4(1-|1-|u-2||)? \end{cases}$$

(5 баллов)

Решение

Рассмотрим функцию $f(x) = 4(1-|1-|x-2||)$.



Тогда система эквивалентна следующей

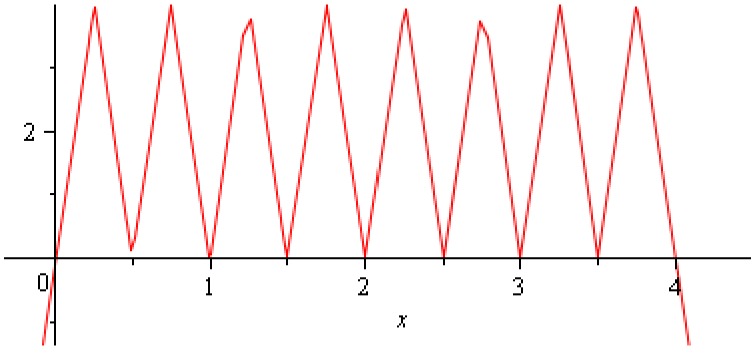
$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = f(y), \\ u = f(z), \\ x = f(u). \end{cases}$$

Количество решений этой системы совпадает с количеством различных решений уравнения $x = f(f(f(f(x).$ Если $x > 4,$ то решений уравнение не имеет, поскольку $f(x) \le 4.$ При $x \in (-\infty; 0]$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x) < x$ для $x < 0.$ Следовательно,

$$f(f(x)) < f(x) < x < 0 \Rightarrow f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x < 0 \Rightarrow$$

$$f(f(f(f(x)))) < f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x < 0,$$ уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ не имеет решений при $x < 0.$ Рассмотрим это уравнение при $x \in [0; 4].$ График функции $y = f(x)$

имеет два перехода от 0 до 4 и обратно, уравнение $x = f(x)$ будет иметь 4 решения. График функции $y = f(f(x))$



имеет 8 переходов от 0 до 4 и обратно, уравнение $x = f(f(x))$ будет иметь 16 решений. График функции $y = f(f(f(x)))$ имеет 32 перехода от 0 до 4 и обратно, уравнение $x = f(f(f(x)))$ будет иметь 64 решения.

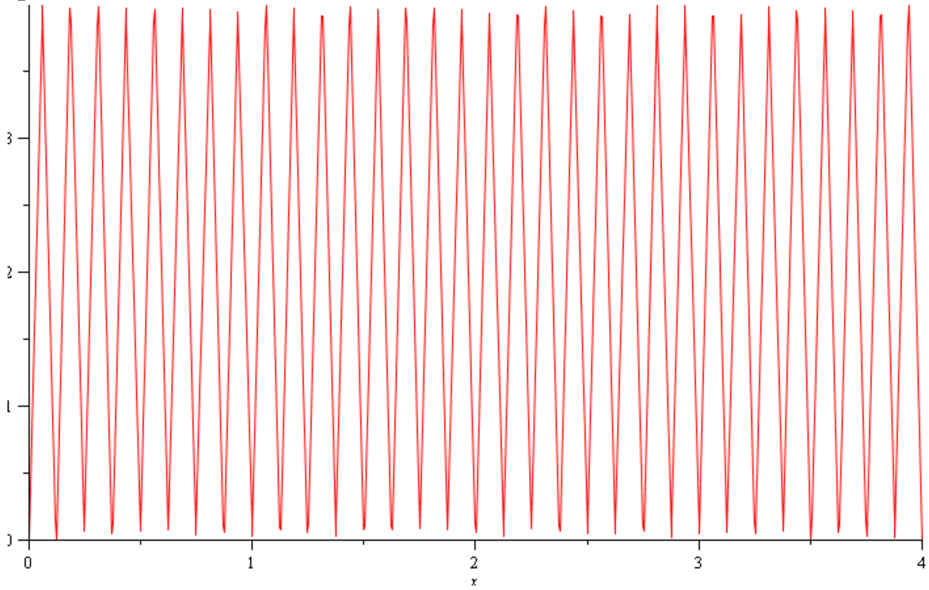


График функции $y = f(f(f(f(x))))$ имеет 128 переходов от 0 до 4 и обратно, уравнение $x = f(f(f(f(x))))$ будет иметь 256 решений.

Ответ: 256.

3. Известно, что $x_1 + 2\,x_2 + 3x_3 + \cdots + \ nx_n = 10,$ где $x_k \geq 0$ при любых $k = 1, 2, \ldots, n$. Какое наибольшее значение может принимать величина

$$2x_1x_2 + \ 6x_2x_3 + 12x_3x_4 + \cdots + (n^2 - n)x_{n-1}x_n?$$ (6 баллов)

Решение.

$$2x_1x_2 + \ 6x_2x_3 + 12x_3x_4 + \cdots + (n^2 - n)x_{n-1}x_n \leq$$
$$\leq (x_1 + \ 3x_3 + 5x_5 + \cdots)(2x_2 + \ 4x_4 + 6x_6 + \cdots) = ab, \qquad a + b = 10,$$
$$2x_1x_2 + \ 6x_2x_3 + 12x_3x_4 + \cdots + (n^2 - n)x_{n-1}x_n \leq a(10 - a) = 10a - a^2 \leq 25.$$

Значение 25 достигается, например, при $x_1 = 2x_2 = 5, x_k = 0, k = 3, 4, 5, \ldots, n$.

Ответ: 25

4. Имеются по два одинаковых треугольных стекла 9 цветов со всеми сторонами по 50 см. Сколькими способами можно вставить 4 стекла в треугольную раму со сторонами по 1 м так, чтобы стёкла, имеющие общую сторону, различались цветом? (12 баллов)

Решение

Цвет центрального стекла можно выбрать 9 способам. Каждое из трех угловых стекол (соседних с центральным, но не граничащих друг с другом) можно выбрать 8 способами. Итого $9*8^3$=4608 способов. Но нужно исключить 9*8=72 случая, когда все три угловых стекла одного цвета.

Ответ: 4536.

5. С каким остатком число 12345678 в степени 456 делится на 11? (12 баллов)

Решение.

$$12345678 \equiv -1+2-3+4-5+6-7+8=4 \pmod{11}; \qquad 4^5=1024 \equiv -1+0-2+4=1 \pmod{11};$$

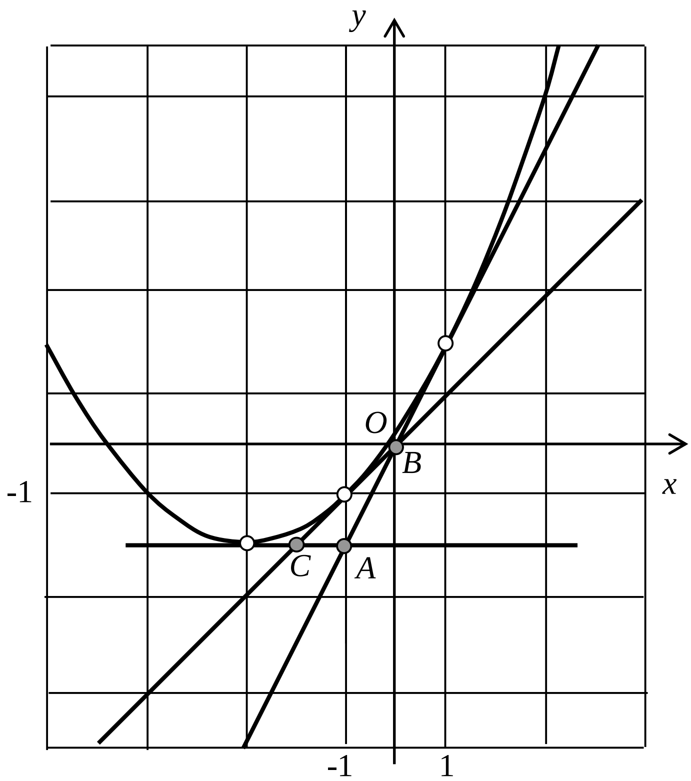
$$N \equiv 4^{456}=4^{5\cdot 91+1}=1024^{91}\cdot 4 \equiv 4 \pmod{11}.$$

Ответ: 4.

6. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=0,25\left(x^2+6x+1\right)$; две из них проходят через точку $A(-1;-2)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC? (12 баллов)

Решение

$y=0,25\left(x^2+6x+1\right)$; $A(-1;-2)$



Уравнение касательной к графику функции:

$$y=\frac{1}{4}x_0^2+\frac{3}{2}x_0+\frac{1}{4}+\frac{x_0+3}{2}\cdot(x-x_0)$$, или

$$y=-\frac{1}{4}x_0^2+\frac{1}{4}+\frac{x_0+3}{2}\cdot x.$$

Для касательных, проходящих через точку A,

$$-2=-\frac{1}{4}x_0^2+\frac{1}{4}-\frac{x_0+3}{2}.$$

Отсюда $x_0^2+2x_0-3=0$, $x_0=\left[\begin{array}{l}1,\\-3.\end{array}\right.$ Уравнения касательных, проходящих через точку A: 1) $y=-2$; 2). $y=2x$ Уравнение прямой CB:

$$y=-\frac{1}{4}x_*^2+\frac{1}{4}+\frac{x_*+3}{2}\cdot x,$$

где x_* – абсцисса точки касания с графиком функции.

В точке $C(y_C;x_C)$ $y_C=-2$.

Тогда $-2=-\frac{1}{4}x_*^2+\frac{1}{4}+\frac{x_*+3}{2}\cdot x_C$. Отсюда $x_C=\frac{x_*^2-9}{4(x_*+3)}\cdot 2=\frac{x_*-3}{2}$.

В точке $B(x_B;y_B)$ $-\frac{1}{4}x_*^2+\frac{1}{4}+\frac{x_*+3}{2}\cdot x_B=2x_B$, $\frac{x_*-1}{2}\cdot x_B=\frac{x_*^2-1}{4}$, $x_B=\frac{x_*+1}{2}$, $y_B=2x_B=x_*+1$.

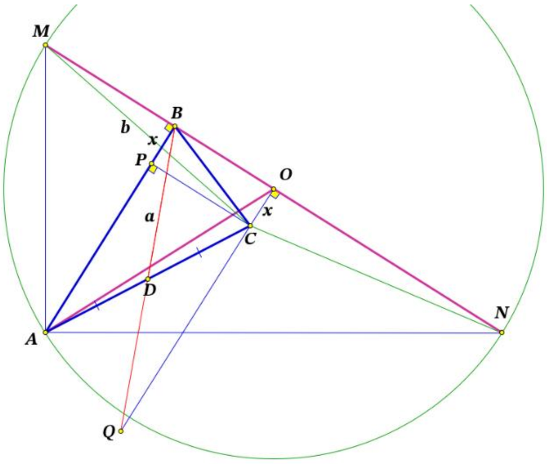
Площадь треугольника ABC равна $S_{\Delta ABC}=0,5\cdot(x_A-x_C)\cdot(y_B-y_A)=\frac{1}{2}\cdot\left(-1-\frac{x_*-3}{2}\right)\cdot(x_*+1+2)=\frac{1}{4}\left(3-2x_*-x_*^2\right)=S(x_*)$.

$S'(x_*)=0,25(-2-2x_*)=0$ при $x_*=-1$. $\max S_{\Delta ABC}=S(-1)=0,25\cdot(3+2-1)=1$.

Ответ: 1.

7. Медиана BD треугольника ABC равна $\sqrt{785}$. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная стороне AB. На этой прямой лежит точка O, $\angle BOC=90°$. Окружность с центром в точке O, проходящая через точку A, пересекает прямую BO в точках M и N. Найдите площадь треугольника OAC, если $MC=10\sqrt{17}$, тангенс угла CAB равен $7/9$. (16 баллов)

Решение



$a=BD=\sqrt{785}$, $b=MC=10\sqrt{17}$,

$\alpha=\angle CAB$, $\operatorname{tg}\alpha=7/9$.

В треугольнике ABC имеем

$2AB^2+2BC^2=4BD^2+AC^2$,

$AC=\sqrt{2(AB^2+BC^2)-4a^2}$,

$AB^2+BC^2=AO^2-BO^2+BC^2=$

$=AO^2+OC^2=b^2$, $AC=\sqrt{2b^2-4a^2}=\sqrt{260}.$

$\operatorname{tg}\alpha=7/9\Rightarrow\cos\alpha=9/\sqrt{130}$,

$PC\perp AB$, $PC=BO$, $AP=AC\cos\alpha=9\sqrt{2}$, $CP=7\sqrt{2}$. $Q=(BD)\cap(OC)$,

$AB=CQ=x+9\sqrt{2}$, $CO=BP=x$, $BQ^2=BO^2+OQ^2$, $4a^2=2\cdot7^2+(2x+9\sqrt{2})^2$,

$3140=98+(2x+9\sqrt{2})^2$, $x=15\sqrt{2}$, $CO=15\sqrt{2}$. $S_{AOC}=BO\cdot CO/2=105.$

Ответ: 105.

8. При каком максимальном значении параметра a $(a\neq0)$ уравнение

$(\cos x+a)^7-(\cos^7x+a^7)=\frac{7}{2}a(\cos^2x+a\cos x+a^2)^2$ имеет более двух корней на интервале $(0;2\pi)$? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра. В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на π. (16 баллов)

Решение

Преобразуем выражение

$$(y+a)^7-(y^7+a^7)=(y+a)(y^6+6y^5a+15y^4a^2+20y^3a^3+15y^2a^4+6ya^5+a^6-$$
$$-y^6+y^5a-y^4a^2+y^3a^3-y^2a^4+ya^5-a^6)=$$
$$=(y+a)(7ay^5+14y^4a^2+21y^3a^3+14y^2a^4+7ya^5)=$$
$$=7ay(y+a)(y^4+2y^3a+3y^2a^2+2ya^3+a^4)=7ay(y+a)(y^2+ay+a^2)^2$$

Сделаем у исходном уравнении замену $y=\cos x$, тогда исходное уравнение примет вид

$7ay(y+a)(y^2+ay+a^2)^2=\frac{7}{2}a(y^2+ay+a^2)^2 \quad\Rightarrow\quad y(y+a)=\frac{1}{2}$ или

$2y^2+2ay-1=0.$ Дискриминант уравнения $D/4=a^2+2>0$, следовательно уравнение всегда имеет два корня разных знаков $y=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}$.

Проверим выполнение неравенств: $-1\le\dfrac{-a-\sqrt{a^2+2}}{2}<0<\dfrac{-a+\sqrt{a^2+2}}{2}\le 1$:

$$\frac{-a-\sqrt{a^2+2}}{2}\ge -1 \Rightarrow 2-a\ge\sqrt{a^2+2} \Rightarrow \begin{cases}2-a>0\\ a^2-4a+4\ge a^2+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<2\\ a\le 1/2\end{cases} \Rightarrow a\le\frac{1}{2}$$

$$\frac{-a+\sqrt{a^2+2}}{2}\le 1 \Rightarrow 2+a\ge\sqrt{a^2+2} \Rightarrow \begin{cases}2+a>0\\ a^2+4a+4\ge a^2+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a>-2\\ a\ge -1/2\end{cases} \Rightarrow a\ge -\frac{1}{2}$$

Следовательно, когда параметр *a* рассматривается на отрезке [-1/2, 1/2] уравнение относительно косинуса имеет 2 различных корня (разных знаков). При этом на интервале $(0;2\pi)$ будет находиться 4 корня, если $a\in(-1/2;1/2)$

$$x=2\pi-\arccos\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+2}}{2}\right), \qquad x=\arccos\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+2}}{2}\right),$$

$$x=\arccos\left(\frac{-a-\sqrt{a^2+2}}{2}\right), \qquad x=2\pi-\arccos\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+2}}{2}\right)$$

При $a=1/2$ только три корня лежат в указанном интервале $x=\pi,\ x=\dfrac{\pi}{3},\ x=\dfrac{5\pi}{3}$. При значениях параметра больше 1/2 существует только косинус, принимающий положительные значения, и исходное уравнение будет иметь не более двух корней. Значит, условию задачи удовлетворяет только $a=1/2$. Сумма полученных корней $3\pi.$

Ответ: 3.

9. Основанием пирамиды *SABC* служит равнобедренный треугольник *ABC*, причем $AB=BC=9$, $AC=12$. Высотой пирамиды *SABC* является отрезок *SO*, где *O* – точка пересечения прямой, проходящей через вершину *B* параллельно стороне *AC*, и прямой, проходящей через *C* перпендикулярно стороне *AC*. Расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC*, равно $4\sqrt{5}/5$. Найдите квадрат объема пирамиды *SABC*.

(16 баллов)

Решение.

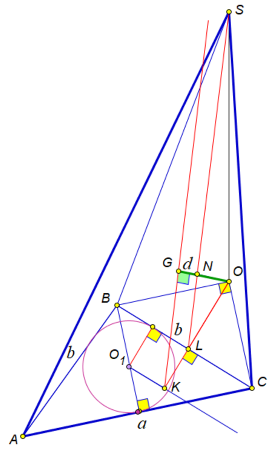
$b=AB=BC=9$, $a=AC=12$.

Расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC* обозначим *d*.

$d=GN$, $d=4\sqrt{5}/5.$

В прямоугольном треугольнике *BOC*:

$$BO=\frac{a}{2},\quad BC=b,\quad CO=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2},$$



$$OL=\frac{BO\cdot OC}{BC}=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4b}.$$

$KL=r,$ где r – радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

$$r=\frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}}=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2(a+2b)},$$

$$\Delta OLN\simeq\Delta OKG\ \Rightarrow\ \frac{ON}{d}=\frac{OL}{KL}\ \Rightarrow ON=\frac{d\cdot OL}{KL}=\frac{d\cdot(a+2b)}{2b}.$$

$$SO=h,\quad ON\sqrt{h^2+OL^2}=h\cdot OL,$$

$$h=\frac{ON\cdot OL}{\sqrt{OL^2-ON^2}}=\frac{d(a+2b)}{2b}\cdot\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4b}\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2\left(4b^2-a^2\right)}{16b^2}-\frac{d^2(a+2b)^2}{4b^2}}},$$

$$h=\frac{ad(a+2b)\sqrt{4b^2-a^2}}{2b\sqrt{a^2\left(4b^2-a^2\right)-4d^2(a+2b)^2}},\quad V_{SABC}=\frac{a^2d(a+2b)(4b^2-a^2)}{24b\sqrt{a^2\left(4b^2-a^2\right)-4d^2(a+2b)^2}}=24\sqrt{5},$$

$$V^2=2880.$$

Ответ: 2880.