***Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования***
**Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2020 г.**
**11 класс**

***Вариант 1***

**1.** В некотором городе поезда метро отправляются через строго одинаковые интервалы времени. Наблюдатель, придя на платформу в произвольный момент времени, в течение 24 минут насчитал 7 поездов, проехавших мимо. Во второй раз, появившись на платформе также в произвольный момент времени, он насчитал в течение 45 минут 11 поездов. Сколько поездов может проследовать мимо наблюдателя в течение 115 минут? (Продолжительность стоянки считаем равной нулю.) В ответ напишите сумму всех возможных решений. (5 баллов)

**2.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = 8|x-1|(1-|x-1|), \\ z = 8|y-1|(1-|y-1|), \\ u = 8|z-1|(1-|z-1|), \\ x = 8|u-1|(1-|u-1|)? \end{cases}$$

(5 баллов)

**3.** Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 3. Какое наибольшее значение может принимать величина $x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + \cdots + x_{n-2}x_n$? (6 баллов)

**4.** Даны 10 разных камней, из них 5 белых, 3 синих и 2 красных. Сколькими способами можно выбрать 5 камней, чтобы никакой цвет не составлял большинства из выбранных? (12 баллов)

**5.** Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3 - 5t - 3 = 0$. Найти $x^4 + y^4 + z^4$. (12 баллов)

**6.** Стороны треугольника $\Delta ABC$ лежат на касательных к графику функции $y = 0,25\left(x^2 + 2x - 3\right)$; две из них проходят через точку $A(1;-1)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне $BC$. Какую наибольшую площадь может иметь $\Delta ABC$? (12 баллов)

**7.** Медиана *BD* треугольника *ABC* равна $\sqrt{392,5}$. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная стороне *AB*. На этой прямой лежит точка *O*, $\angle BOC = 90°$. Окружность с центром в точке *O*, проходящая через точку *A*, пересекает прямую *BO* в точках *M* и *N*. Найдите площадь треугольника *MAN*, если $MC = 5\sqrt{34}$, тангенс угла *CAB* равен $7/9$. (16 баллов)

**8.** При каком минимальном значении параметра *a* уравнение $\sqrt{2}\sin(2y + \frac{\pi}{2}) + a\sin(y - \frac{\pi}{4}) = a\cos(\frac{\pi}{4} - y)$ имеет более двух корней на интервале $(0; 2\pi)$? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра. В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на $\pi$. (16 баллов)

**9**. Основанием пирамиды *SABC* служит равнобедренный треугольник *ABC*, причем $AB = BC = 9\sqrt{5}$, $AC = 12\sqrt{5}$. Высотой пирамиды *SABC* является отрезок *SO*, где *O* – точка пересечения прямой, проходящей через вершину *B* параллельно стороне *AC*, и прямой, проходящей через *C* перпендикулярно стороне *AC*. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC*, если $SO = 4\sqrt{5}$. (16 баллов)

## Решение варианта 1

**1.** В некотором городе поезда метро отправляются через строго одинаковые интервалы времени. Наблюдатель, придя на платформу в произвольный момент времени, в течение 24 минут насчитал 7 поездов, проехавших мимо. Во второй раз, появившись на платформе также в произвольный момент времени, он насчитал в течение 45 минут 11 поездов. Сколько поездов может проследовать мимо наблюдателя в течение 115 минут? (Продолжительность стоянки считаем равной нулю.) В ответ напишите сумму всех возможных решений. (5 баллов)

**Решение.** $T$ – интервалы времени, через которые отправляются поезда метро.

$$1)\ 6T \le 24,\quad 8T > 24 \quad\Rightarrow\quad 3 < T \le 4$$

$$2)\ 10T \le 45,\quad 12T > 45 \quad\Rightarrow\quad 3{,}75 < T \le 4{,}5$$

$$\Rightarrow 3{,}75 < T \le 4$$

$$(n-1)T \le 115 < (n+1)T \Rightarrow \frac{115}{T} - 1 < n \le \frac{115}{T} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{115}{4} - 1 \le \frac{115}{T} - 1 < n \le \frac{115}{T} + 1 < \frac{115}{3{,}75} + 1 \Rightarrow$$

$$27{,}75 < n < 31\frac{2}{3} \Rightarrow n = 28;\ 29;\ 30;\ 31$$

**Ответ:** 118.

**2.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = 8|x-1|(1-|x-1|), \\ z = 8|y-1|(1-|y-1|), \\ u = 8|z-1|(1-|z-1|), \\ x = 8|u-1|(1-|u-1|)? \end{cases}$$

(5 баллов)

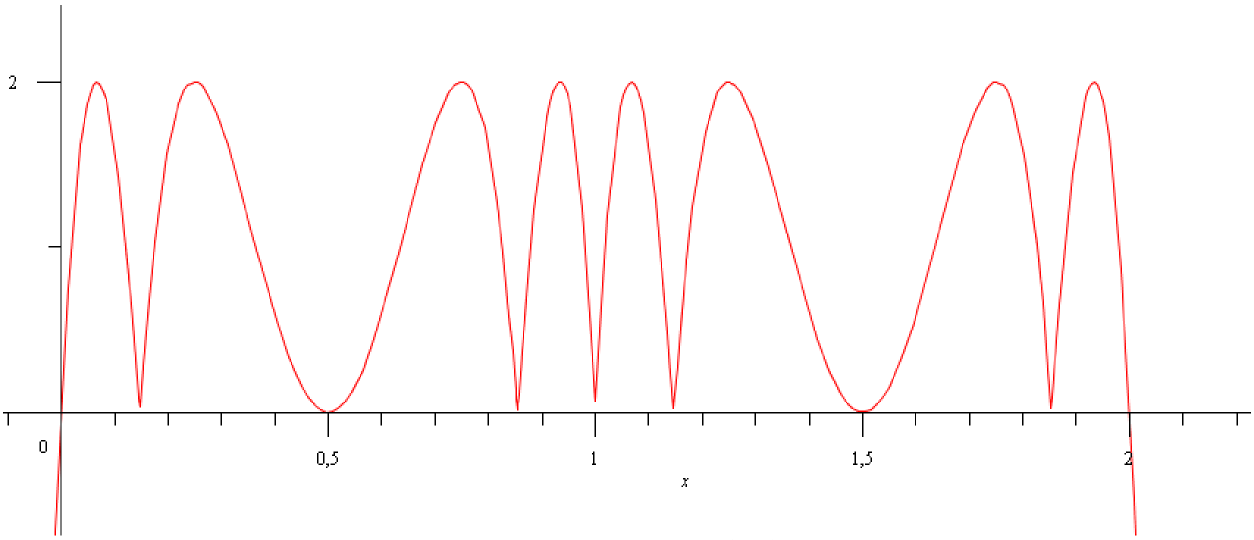
**Решение**

Рассмотрим функцию $f(x) = 8|x-1|(1-|x-1|)$.

Тогда система эквивалентна следующей

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = f(y), \\ u = f(z), \\ x = f(u). \end{cases}$$

Количество решений этой системы совпадает с количеством различных решений уравнения $x = f(f(f(f(x).$ Если $x > 2,$ то решений уравнение не имеет, поскольку $f(x) \le 2.$ При $x \in (-\infty; 0]$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x) < x$ для $x < 0.$ Следовательно, $f(f(x)) < f(x) < x < 0 \Rightarrow f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x < 0 \Rightarrow$ $f(f(f(f(x)))) < f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x < 0,$ уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ не имеет решений при $x < 0.$ Рассмотрим это уравнение при $x \in [0; 2].$ График функции $y = f(x)$ имеет два перехода от 0 до 2 и обратно, уравнение $x = f(x)$ будет иметь 4 решения. График функции $y = f(f(x))$




имеет 8 переходов от 0 до 2 и обратно, уравнение $x = f(f(x))$ будет иметь 16 решений. График функции $y = f(f(f(x)))$ имеет 32 перехода от 0 до 2 и обратно, уравнение $x = f(f(f(x)))$ будет иметь 64 решения.

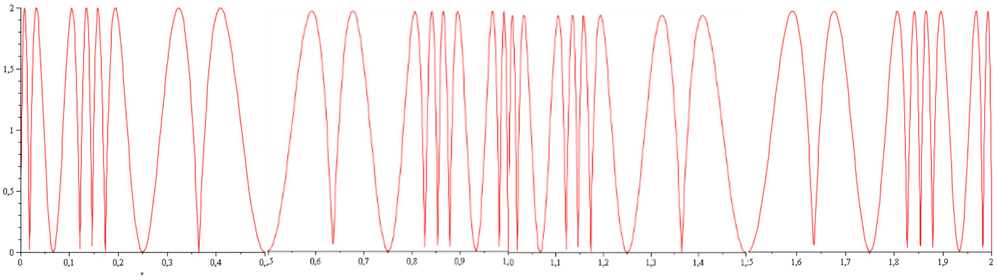


График функции $y = f(f(f(f(x))))$ имеет 128 переходов от 0 до 2 и обратно, уравнение $x = f(f(f(f(x))))$ будет иметь 256 решений.

**Ответ:** 256.

**3.** Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 3. Какое наибольшее значение может принимать величина $x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + \dots + x_{n-2}x_n$? (6 баллов)

**Решение.**

$$x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + \dots + x_{n-2}x_n \le$$
$$\le (x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + \cdots)(x_3 + x_4 + x_7 + x_8 + \cdots) = ab, \qquad a + b = 3,$$
$$x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + \dots + x_{n-2}x_n \le a(3 - a) = 3a - a^2 \le 2{,}25.$$

Значение 2,25 достигается, например, при $x_1 = x_3 = 1{,}5, x_k = 0, k = 2, 4, 5, \dots, n$.

**Ответ:** 2, 25.

**4.** Даны 10 разных камней, из них 5 белых, 3 синих и 2 красных. Сколькими способами можно выбрать 5 камней, чтобы никакой цвет не составлял большинства из выбранных? (12 баллов)

**Решение.** Имеем три варианта:

2Б + 2Ч + 1К — число способов $C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1 = 10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$

2Б + 1Ч + 2К — число способов $C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 = 10 \cdot 3 \cdot 1 = 30$

1Б + 2Ч + 2К — число способов $C_5^1 \cdot C_3^2 \cdot C_2^2 = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$

**Ответ:** 105.

**5.** Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3-5t-3=0$. Найти $x^4+y^4+z^4$. (12 баллов)

**Решение.**

Многочлен имеет 3 разных действительных корня, т. к. $P(-100)<0$, $P(-1)>0$, $P(1)<0$, $P(100)>0$. По теореме Виета $x+y+z=0$, $xy+xz+yz=-5$, $xyz=-3$.

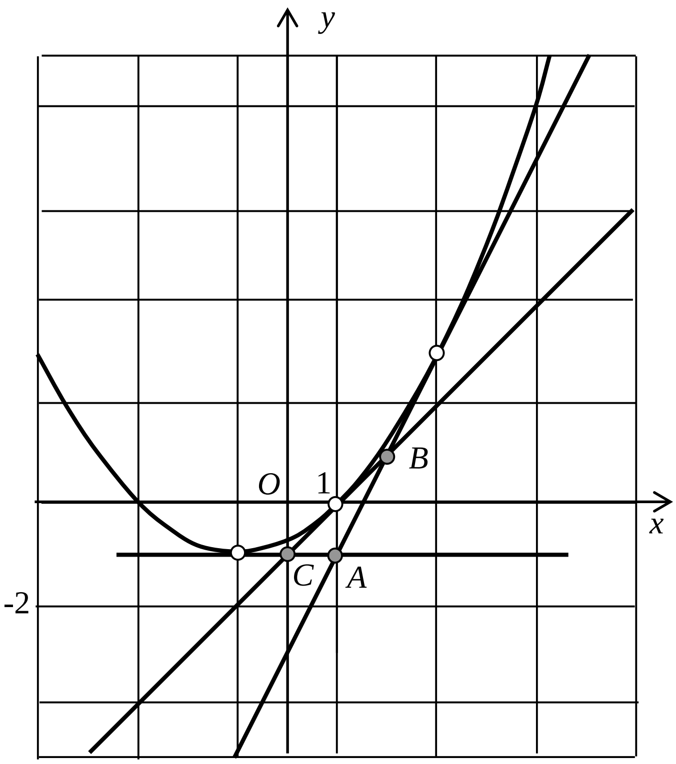
$$x^4+y^4+z^4=x\cdot x^3+y\cdot y^3+z\cdot z^3=x(5x-3)+y(5y-3)+z(5z-3)=$$
$$=5((x+y+z)^2-2(xy+xz+yz))-3(x+y+z)=5(0-2(-5))-0=50.$$

**Ответ:** 50.

**6.** Стороны треугольника $\Delta ABC$ лежат на касательных к графику функции $y=0,25\left(x^2+2x-3\right)$; две из них проходят через точку $A(1;-1)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне $BC$. Какую наибольшую площадь может иметь $\Delta ABC$? (12 баллов)

**Решение**

$y=0,25\left(x^2+2x-3\right)$; $A(1;-1)$




Уравнение касательной к графику функции:

$y=\frac{1}{4}x_0^2+\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{4}+\frac{x_0+1}{2}\cdot\left(x-x_0\right)$, или

$y=-\frac{1}{4}x_0^2-\frac{3}{4}+\frac{x_0+1}{2}\cdot x$.

Для касательных, проходящих через точку $A$,

$-1=-\frac{1}{4}x_0^2-\frac{3}{4}-\frac{x_0+1}{2}$. Отсюда $x_0^2-2x_0-3=0$,

$x_0=\left[\begin{array}{l}3,\\-1.\end{array}\right.$ Уравнения касательных, проходящих через точку $A$: 1) $y=-1$; 2). $y=2x-3$ Уравнение прямой $CB$:

$y=-\frac{1}{4}x_*^2-\frac{3}{4}+\frac{x_*+1}{2}\cdot x$,

где $x_*$ – абсцисса точки касания с графиком функции.

В точке $C\left(y_C;x_C\right)$ $y_C=-1$.

Тогда $-1=-\frac{1}{4}x_*^2-\frac{3}{4}+\frac{x_*+1}{2}\cdot x_C$. Отсюда $x_C=\frac{x_*^2-1}{4(x_*+1)}\cdot 2=\frac{x_*-1}{2}$.

В точке $B\left(x_B;y_B\right)$ $-\frac{1}{4}x_*^2-\frac{3}{4}+\frac{x_*+1}{2}\cdot x_B=2x_B-3$, $\frac{x_*-3}{2}\cdot x_B=\frac{x_*^2-9}{4}$, $x_B=\frac{x_*+3}{2}$, $y_B=2x_B-3=x_*$.

Площадь треугольника $ABC$ равна

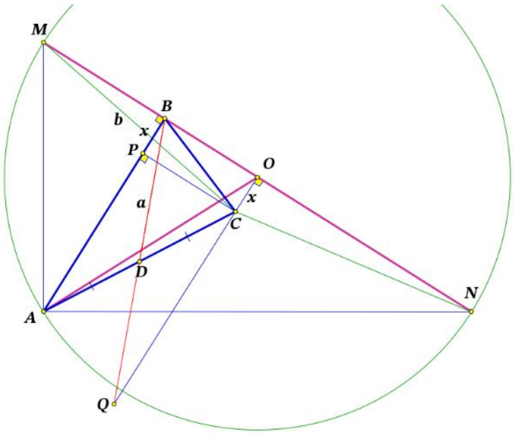
$S_{\Delta ABC}=0,5\cdot\left(x_A-x_C\right)\cdot\left(y_B-y_A\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x_*-1}{2}\right)\cdot\left(x_*+1\right)=\frac{1}{4}\left(3+2x_*-x_*^2\right)=S\left(x_*\right)$.

$S'\left(x_*\right)=0,25\left(2-2x_*\right)=0$ при $x_*=1$. $\max S_{\Delta ABC}=S(1)=0,25\cdot(3+2-1)=1$.

**Ответ:** 1.

**7.** Медиана *BD* треугольника *ABC* равна $\sqrt{392,5}$. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная стороне *AB*. На этой прямой лежит точка *O*, $\angle BOC = 90°$. Окружность с центром в точке *O*, проходящая через точку *A*, пересекает прямую *BO* в точках *M* и *N*. Найдите площадь треугольника *MAN*, если $MC = 5\sqrt{34}$, тангенс угла *CAB* равен $7/9$. (16 баллов)

**Решение**




$a = BD = \sqrt{392,5}$, $\quad b = MC = 5\sqrt{34}$,

$\alpha = \angle CAB$, $\operatorname{tg}\alpha = 7/9$.

В треугольнике *ABC* имеем

$$2AB^2 + 2BC^2 = 4BD^2 + AC^2,$$

$$AC = \sqrt{2(AB^2 + BC^2) - 4a^2},$$

$$AB^2 + BC^2 = AO^2 - BO^2 + BC^2 =$$

$$= AO^2 + OC^2 = b^2,\ AC = \sqrt{2b^2 - 4a^2} = \sqrt{130}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 7/9 \Rightarrow \cos\alpha = 9/\sqrt{130},$$

$$PC \perp AB,\ PC = BO,\ AP = AC\cos\alpha = 9,\ CP = 7.$$

$$Q = (BD) \cap (OC),$$

$$AB = CQ = x + 9,\ CO = BP = x,\ \ BQ^2 = BO^2 + OQ^2,\ \ 4a^2 = 7^2 + (2x+9)^2,$$

$$1570 = 49 + (2x+9)^2,\ x = 15,\ AB = 24,\ AO = 25,\ MN = 50.\ \ S_{MAN} = AB \cdot MN/2 = 600.$$

**Ответ:** 600.

**8.** При каком минимальном значении параметра *a* уравнение $\sqrt{2}\sin(2y + \frac{\pi}{2}) + a\sin(y - \frac{\pi}{4}) = a\cos(\frac{\pi}{4} - y)$ имеет более двух корней на интервале $(0; 2\pi)$? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра. В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на $\pi$. (16 баллов)

**Решение**

Используя формулы тригонометрии, получим

$$\sqrt{2}\cos(2y) + a(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y) = 0$$ или

$\cos(2y) - a\cos y = 0 \ \Rightarrow\ 2\cos^2 y - a\cos y - 1 = 0$. Решим полученное квадратное уравнение, для этого найдем дискриминант $D = a^2 + 8 > 0$, т.к. он всегда положителен, то $\cos y = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2+8}}{4}$, произведение полученных двух косинусов отрицательно.

Проверим выполнение неравенств: $-1 \le \dfrac{a - \sqrt{a^2+8}}{4} < 0 < \dfrac{a + \sqrt{a^2+8}}{4} \le 1$:

$$\frac{a - \sqrt{a^2+8}}{4} \ge -1 \Rightarrow a + 4 \ge \sqrt{a^2+8} \Rightarrow \begin{cases} a + 4 > 0 \\ a^2 + 8a + 16 \ge a^2 + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -4 \\ a \ge -1 \end{cases} \Rightarrow a \ge -1$$

$$\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4} \le 1 \;\Rightarrow 4-a \ge \sqrt{a^2+8} \;\Rightarrow \begin{cases} 4-a>0 \\ a^2-8a+16 \ge a^2+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<4 \\ a \le 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a \le 1$$

Следовательно, когда параметр *a* рассматривается на отрезке [-1, 1] уравнение относительно косинуса имеет 2 различных корня (разных знаков). При этом на интервале $(0;2\pi)$ будет находиться 4 корня, если $a \in (-1;1)$

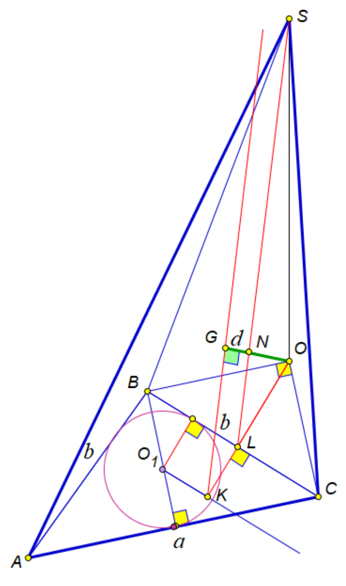
$$y = 2\pi - \arccos\left(\frac{a-\sqrt{a^2+8}}{4}\right), \qquad y = 2\pi - \arccos\left(\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}\right),$$

$$y = \arccos\left(\frac{a-\sqrt{a^2+8}}{4}\right), \qquad y = \arccos\left(\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}\right)$$

При $a=-1$ только три корня лежат в указанном интервале $y=\pi,\; y=\frac{\pi}{3},\; y=\frac{5\pi}{3}$. При значениях параметра меньше -1 существует только косинус, принимающий положительные значения, и исходное уравнение будет иметь не более двух корней. Значит, условию задачи удовлетворяет только $a=-1$. Сумма полученных корней $3\pi$.

**Ответ:** 3.

**9**. Основанием пирамиды *SABC* служит равнобедренный треугольник *ABC*, причем $AB = BC = 9\sqrt{5}$, $AC = 12\sqrt{5}$. Высотой пирамиды *SABC* является отрезок *SO*, где *O* – точка пересечения прямой, проходящей через вершину *B* параллельно стороне *AC*, и прямой, проходящей через *C* перпендикулярно стороне *AC*. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC*, если $SO = 4\sqrt{5}$. (16 баллов)




**Решение**

$b = AB = BC = 9\sqrt{5}$, $a = AC = 12\sqrt{5}$, $h = SO = 4\sqrt{5}$.

Расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC* обозначим *d*.

$d = GN$.

В прямоугольном треугольнике *BOC*:

$$BO = \frac{a}{2}, \quad BC = b, \quad CO = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

$$OL = \frac{BO \cdot OC}{BC} = \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4b}.$$

$KL = r$, где *r* – радиус вписанной в треугольник *ABC* окружности.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2(a+2b)},$$

$$\Delta OLN \sim \Delta OKG \;\Rightarrow\; \frac{ON}{d} = \frac{OL}{KL} \;\Rightarrow\; d = \frac{ON \cdot KL}{OL} = \frac{ON \cdot 4b}{2(a+2b)}.$$

$$ON=\frac{h\cdot OL}{\sqrt{h^2+OL^2}}=\frac{ha\sqrt{4b^2-a^2}}{4b\sqrt{h^2+\frac{a^2\left(4b^2-a^2\right)}{16b^2}}}=\frac{ha\sqrt{4b^2-a^2}}{\sqrt{16b^2h^2+a^2\left(4b^2-a^2\right)}}.$$

$$d=\frac{4abh\sqrt{4b^2-a^2}}{2(a+2b)\sqrt{16b^2h^2+a^2\left(4b^2-a^2\right)}}=4.$$

**Ответ:** 4.