Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2020 г.

10 класс

Вариант 2

№1. Два велогонщика стартовали одновременно с общего начала велопробега, один со скоростью 40 км/ч, другой со скоростью 30 км/ч. Через полчаса с того же места по трассе велопробега вслед за ними выехал мотоциклист. Найдите скорость мотоциклиста (в км/ч), если известно, что он догнал первого гонщика на 1 час 15 минут позже, чем второго.

№2. Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой BC и AE равны 5 и 7, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC. На AB отмечена точка F так, что BF:FA=2:3, на AC отмечена точка G так, что AG:GC=4:1; на AE отмечена точка D так, что AD:DE=5:2. Определите градусную меру угла DFG.

№3. В геометрической прогрессии сумма трех первых членов и сумма величин, обратных этим числам, одинаковы и равны 1580. Найти наименьшее возможное значение второго члена этой прогрессии.

№4. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке M. Найти градусную меру угла B_1BM.

№5. Хозяйка для засолки огурцов использует рассол, который готовит так: на 350 г воды берет 90 г соли. Пытаясь исправить ошибку неопытной помощницы, хозяйка встала перед проблемой: 1 литр 9%-го солевого раствора надо довести до нужной концентрации. Сколько граммов соли она должна добавить?

№6. Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+1)+1=f(x)+\frac{20}{(x+1)(x+2)}$. Вычислите $\frac{2019}{f(2019)}$, если $f(0)=2019$.

№7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35x35 –всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих уголок (фигуру «Г»), обязательно была хотя бы одна закрашенная.

№8. Найдите сумму всех целых значений s, при которых уравнение

$$11|q+1|-4q=\big||q-s|+2q\big|$$

относительно q не имеет ни одного корня.

№9. (старинная задача). М.В. Ломоносов в юные годы тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, то на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Если цены ещё раз вырастут на 20%, то сколько будет стоить квас?

Решение варианта 2

№1. Два велогонщика стартовали одновременно с общего начала велопробега, один со скоростью 40 км/ч, другой со скоростью 30 км/ч. Через полчаса с того же места по трассе велопробега вслед за ними выехал мотоциклист. Найдите скорость мотоциклиста (в км/ч), если известно, что он догнал первого гонщика на 1 час 15 минут позже, чем второго.

Решение

Обозначим: v – скорость мотоциклиста, t_1, t_2 – время, через которое мотоциклист нагнал соответственно первого и второго велогонщиков. По условию $vt_1 - 40t_1 = 20$ и $vt_2 - 30t_2 = 15.$ Выразим из уравнений t_1, t_2 и приравняв их разность к 1,25 часа, получим уравнение

$$\frac{20}{v-40} - \frac{15}{v-30} = \frac{5}{4},$$

которое преобразуется к квадратному уравнению

$$v^2 - 74v + 1200 = 0,$$

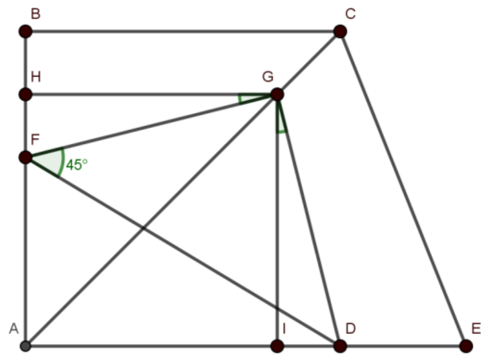
$v_1 = 50$ км/ч, $v_2 = 24$ км/ч – не подходит $(24 < 30)$ по условию задачи.

Ответ: 50.

№2. Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой BC и AE равны 5 и 7, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC. На AB отмечена точка F так, что BF:FA=2:3, на AC отмечена точка G так, что AG:GC=4:1; на AE отмечена точка D так, что AD:DE=5:2. Определите градусную меру угла DFG.

Решение

Построим перпендикуляры GI и GH.



1) $\Delta GID = \Delta GFH$ - по двум катетам, так как $GI = GH = 4;\ FH = ID = 1,$ поэтому $FG = GD,$ $\angle FGH = \angle DGI = \alpha$.

2) $GIAH$ - квадрат, значит $\angle IGH = 90^0,\ \angle IGH = \angle FGH + \angle IGF = \alpha + \angle IGF.$

3) $\angle DGF = \angle DGI + \angle IGF = \alpha + \angle IGF = 90^0.$

4) ΔDFG - прямоугольный равнобедренный треугольник, так как $FG = GD,$ и значит $\angle DFG = 45^0.$

Ответ: 45.

№3. В геометрической прогрессии сумма трех первых членов и сумма величин, обратных этим числам, одинаковы и равны 1580. Найти наименьшее возможное значение второго члена этой прогрессии.

Решение: По условию задачи:

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3=1580 \\ \dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_3}=1580 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=1580 \\ \dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_1q}+\dfrac{1}{b_1q^2}=1580 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=1580 \\ \dfrac{1+q+q^2}{b_1q^2}=1580 \end{cases}$$

Поделим первое равенство на второе, получим: $b_1^2q^2=1 \Leftrightarrow b_1q=\pm1$, следовательно, $b_2=\pm1$, и наименьшее значение b_2 равно -1.

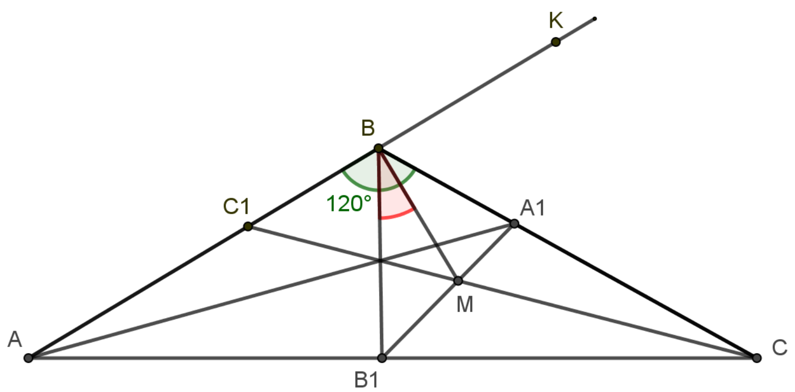
Проверим, существуют ли значения q, удовлетворяющие условию задачи, подставим $b_1q=-1$ во второе уравнение системы: $\dfrac{1+q+q^2}{-q}=1580 \Leftrightarrow 1+q+q^2=-1580q \Leftrightarrow q^2+1581q+1=0$.

Дискриминант этого уравнения положителен, значит, решения существуют.

Ответ: -1.

№4. В треугольнике ABC с углом $\angle B=120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке М. Найти градусную меру угла B_1BM.

Решение



Продолжим сторону AB за точку B, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK. Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Таким образом, B_1A_1 - биссектриса $\angle BB_1C$.

В треугольнике BB_1C точка M - точка пересечения биссектрис B_1A_1 и CC_1, а значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM=\angle MBC=30^\circ$.

Ответ: 30.

№5. Хозяйка для засолки огурцов использует рассол, который готовит так: на 350 г воды берет 90 г соли. Пытаясь исправить ошибку неопытной помощницы, хозяйка встала перед проблемой: 1 литр 9%-го солевого раствора надо довести до нужной концентрации. Сколько граммов соли она должна добавить?

Решение

Пусть к раствору нужно добавить x граммов соли. После этого концентрация должна стать такой же, как у хозяйки. Получим уравнение (масса раствора также увеличится на x граммов):

$\frac{90}{350+90}=\frac{90+x}{1000+x}$, откуда $9\cdot(1000+x)=(90+x)\cdot 44$; $5040=35x$; $x=144$.

Ответ: 144 г.

№6. Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+1)+1=f(x)+\frac{20}{(x+1)(x+2)}$. Вычислите $\frac{2019}{f(2019)}$, если $f(0)=2019$.

Решение.

Заметим, что

$f(x+2019)-f(x)=\big(f(x+2019)-f(x+2018)\big)+\big(f(x+2018)-f(x+2017)\big)+\dots+\big(f(x+1)-f(x)\big)=\frac{20}{(x+2019)(x+2020)}-1+\frac{20}{(x+2018)(x+2019)}-1+\dots+\frac{20}{(x+1)(x+2)}-1.$

Таким образом, $f(2019)-f(0)=20\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}+\ \dots\ +1-\frac{1}{2}\right)-2019=20\left(1-\frac{1}{2020}\right)-2019.$

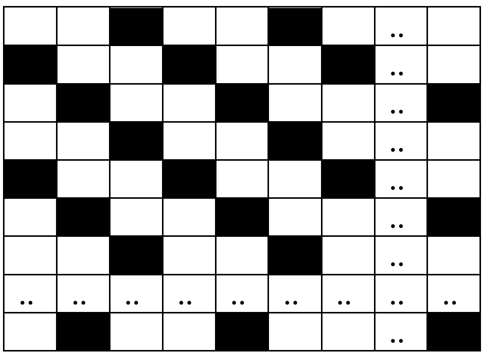
Следовательно, $\frac{2019}{f(2019)}=\frac{2020}{20}=101.$

Ответ: 101.

№7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 35 клеток (35х35 –всего в квадрате 1225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих уголок (фигуру «Г»), обязательно была хотя бы одна закрашенная.

Решение.

Закрашивать надо по диагонали каждую 3-ю (см. рис.), причем клетки, закрашенные дважды – не закрашиваются. Таким образом, будет закрашено $[\frac{N^2}{3}]$ клеток. Это минимально возможное количество, так как в любом квадрате 3х3 внутри исходного меньше трех клеток закрашивать нельзя.



Ответ: 408.

№8. Найдите сумму всех целых значений s, при которых уравнение

$$11|q+1|-4q=\left||q-s|+2q\right|$$

относительно q не имеет ни одного корня.

Решение

Рассмотрим функцию $f(q)=11|q+1|-4q-\left||q-s|+2q\right|$. Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при q (11>4+1+2). Отсюда следует, что на всех интервалах до $q=-1$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $q=-1$ - положителен, $q=-1$ - точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(q)=0$ не имело ни одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(-1)>0$. Решим неравенство.

Обозначим $|q+1|=t$, получим:

$4-|t-2|>0$, $(t-2)^2-4^2<0$,

$(t-6)(t+2)<0$, $t\in(-2;6)$, $|q+1|<6$, $q\in(-7;5)$,

сумма целых значений q: -11.

Ответ: -11.

№9. (старинная задача). М.В.Ломоносов в юные годы тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, то на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Если цены ещё раз вырастут на 20%, то сколько будет стоить квас?

Решение: Примем денежку за единицу, стоимость хлеба обозначим за x а стоимость кваса за y. Тогда до повышения цен $x+y=1$. А после повышения $1,2(0,5x+y)=1$. То есть $0,6x+1,2y=1$.

Решая систему, находим x и y. $x=\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}$. Далее, считая значение выражения $1,2\cdot1,2y$, получим, что после повышения цен на хлеб и квас ещё раз на 20%, на квас всё таки будет хватать.

$$1,2\cdot1,2y=1,2\cdot1,2\cdot\frac{2}{3}=\frac{24}{25}.$$

Ответ: 0,96.