

**Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование
и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2020 г.**

9 класс

Вариант 2

1. Вася загадал два натуральных числа. Сумма утроенного квадрата первого числа и учетверенного произведения первого и второго числа на 13 больше квадрата второго числа, умноженного на 7. Найдите эти числа, в ответе запишите сумму этих чисел.

2. Найдите сумму всех целых значений s , при которых уравнение

$$11|q + 1| - 4q = ||q - s| + 2q|$$

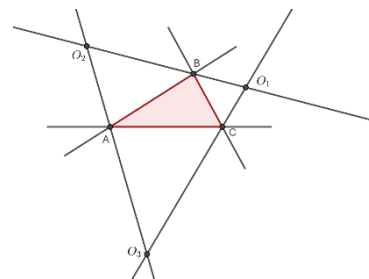
относительно q не имеет ни одного корня.

3. Мальчик написал на листе бумаги первые двадцать натуральных чисел. Ему не понравилось, как написано одно из них, и он зачеркнул это число. Оказалось, что среди 19 оставшихся есть число, равное среднему арифметическому этих 19 чисел. Какое число он зачеркнул? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ сумму этих чисел.

4. Два велогонщика стартовали одновременно с общего начала велопробега, один со скоростью 40 км/ч, другой со скоростью 30 км/ч. Через полчаса с того же места по трассе велопробега вслед за ними выехал мотоциклист. Найдите скорость мотоциклиста (в км/ч), если известно, что он догнал первого гонщика на 1 час 15 минут позже, чем второго.

5. В коробке лежат носки семи цветов. Если взять из коробки 25 носков, то среди них гарантированно окажутся все имеющиеся цвета. Чему равно наибольшее число носков, которое может быть в коробке?

6. Дан треугольник ABC . Прямые O_1O_2 , O_1O_3 , O_3O_2 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC , как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O_2 и OO_3 .



7. Дана прямоугольная трапеция $ABCE$, основания которой BC и AE равны 5 и 7, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC . На AB отмечена точка F так, что $BF:FA=2:3$, на AC отмечена точка G так, что $AG:GC=4:1$; на AE отмечена точка D так, что $AD:DE=5:2$. Определите градусную меру угла DFG .

8. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120^\circ$ проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 , CC_1 . Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке M . Найти градусную меру угла B_1BM .

9. Студенты-химики Иванов и Петров взяли две бутылки с растворами, имеющими различное процентное содержание спирта. Массы жидкостей 3,2 и 4,8 кг. Затем они отлили из бутылей по одинаковому количеству раствора, после чего жидкость, отлитую из бутылки Петрова, перелили к Иванову и наоборот. В результате процентное содержание спирта в обоих бутылках стало одинаковым. Определить сколько граммов раствора переливалось каждым студентом.

Решение варианта 2

1. Вася загадал два натуральных числа. Сумма утроенного квадрата первого числа и учетверенного произведения первого и второго числа на 13 больше квадрата второго числа, умноженного на 7. Найдите эти числа, в ответе запишите сумму этих чисел.

Решение.

Пусть x – первое число, y – второе число. Получим уравнение:

$$3x^2 + 4xy = 7y^2 + 13,$$

$$3x^2 - 3xy + 7xy - 7y^2 = 13,$$

$$(x - y)(3x + 7y) = 13,$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = 13 \\ 3x + 7y = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 7y = -13 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = -13 \\ 3x + 7y = -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9,2 \\ y = -3,8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -9,2 \\ y = 3,8 \end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяют $x=2$ и $y=1$, сумма равна 3.

Ответ: 3.

2. Найдите сумму всех целых значений s , при которых уравнение

$$11|q + 1| - 4q = ||q - s| + 2q|$$

относительно q не имеет ни одного корня.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(q) = 11|q + 1| - 4q - ||q - s| + 2q|$. Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при q ($11 > 4 + 1 + 2$). Отсюда следует, что на всех интервалах до $q = -1$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $q = -1$ – положителен, $q = -1$ – точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(q) = 0$ не имело ни одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(-1) > 0$. Решим неравенство.

Обозначим $|q + 1| = t$, получим:

$$4 - |t - 2| > 0, (t - 2)^2 - 4^2 < 0,$$

$$(t - 6)(t + 2) < 0, t \in (-2; 6), |q + 1| < 6, q \in (-7; 5),$$

сумма целых значений q : -11 .

Ответ: -11 .

3. Мальчик написал на листе бумаги первые двадцать натуральных чисел. Ему не понравилось, как написано одно из них, и он зачеркнул это число. Оказалось, что среди 19 оставшихся есть число, равное среднему арифметическому этих 19 чисел. Какое число он зачеркнул? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ сумму этих чисел.

Решение.

Сумма чисел на листе, первоначально равная $1+2+3+\dots+20=210$ и уменьшившаяся на зачеркнутое число, заключена в пределах от $210-20=190$ до $210-1=209$. Она, кроме того, кратна 19, поскольку в 19 раз больше одного из слагаемых. А так, как из чисел 190, 191, 192, ..., 209 только числа 190 и 209 кратны 19, то стёрли либо число $20=210-190$, либо $1=210-209$. В обоих случаях среднее арифметическое чисел, оставшихся на листе, не совпадает со стёртым числом.

Ответ: 21.

4. Два велогонщика стартовали одновременно с общего начала велопробега, один со скоростью 40 км/ч, другой со скоростью 30 км/ч. Через полчаса с того же места по трассе велопробега вслед за ними выехал мотоциклист. Найдите скорость мотоциклиста (в км/ч), если известно, что он догнал первого гонщика на 1 час 15 минут позже, чем второго.

Решение.

Обозначим: v – скорость мотоциклиста, t_1, t_2 – время, через которое мотоциклист нагнал соответственно первого и второго велогонщиков. По условию $vt_1 - 40t_1 = 20$ и $vt_2 - 30t_2 = 15$. Выразим из уравнений t_1, t_2 и приравняв их разность к 1,25 часа, получим уравнение

$$\frac{20}{v - 40} - \frac{15}{v - 30} = \frac{5}{4},$$

которое преобразуется к квадратному уравнению

$$v^2 - 74v + 1200 = 0,$$

$v_1 = 50$ км/ч, $v_2 = 24$ км/ч – не подходит ($24 < 30$) по условию задачи.

Ответ: 50.

5. В коробке лежат носки семи цветов. Если взять из коробки 25 носков, то среди них гарантированно окажутся все имеющиеся цвета. Чему равно наибольшее число носков, которое может быть в коробке?

Решение.

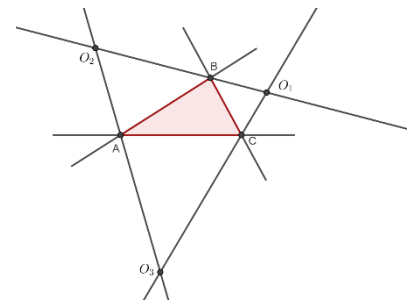
Пусть в коробке лежат n носков, тогда, по принципу Дирихле, носков какого-то цвета не больше $\frac{n}{7}$, следовательно, остальных – не меньше $\frac{6n}{7}$, причём их должно быть меньше 25 (по условию).

$$\text{Получаем } \frac{6n}{7} < 25, n < \frac{175}{6}, n \leq 29.$$

Число 29 не подходит, потому что тогда в коробке будут носки одного цвета в количестве не более 4 штук, а носков остальных цветов – не менее 25, что противоречит условию. Для следующего числа 28 существует ситуация (для каждого из 7 цветов – 4 носка), удовлетворяющая условию задачи.

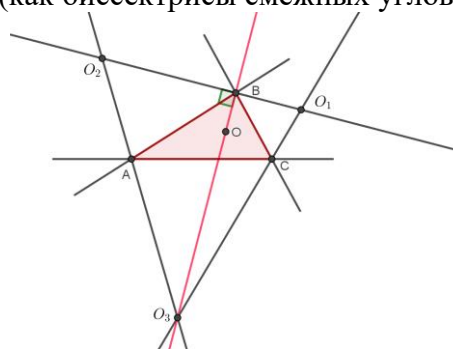
Ответ: 28.

6. Дан треугольник ABC . Прямые O_1O_2, O_1O_3, O_3O_2 – биссектрисы внешних углов треугольника ABC , как показано на рисунке. Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O_2 и OO_3 .



Решение.

Точка O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC , следовательно, биссектриса BO перпендикулярна прямой O_1O_2 (как биссектрисы смежных углов треугольника).



Точка O_3 , как равноудаленная от прямых BA и BC , лежит на BO . Следовательно, прямая OO_3 , совпадающая с BO , перпендикулярна прямой O_1O_2 .

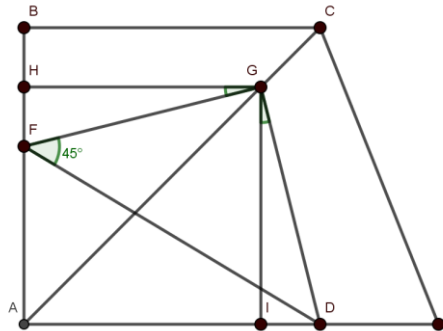
Ответ: 90.

7. Дана прямоугольная трапеция $ABCE$, основания которой BC и AE равны 5 и 7, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC . На AB отмечена точка F так, что $BF:FA=2:3$, на AC

отмечена точка G так, что $AG:GC=4:1$; на AE отмечена точка D так, что $AD:DE=5:2$. Определите градусную меру угла DFG.

Решение.

Построим перпендикуляры GI и GH.



1) $\triangle GID = \triangle GFH$ - по двум катетам, так как $GI = GH = 4$; $FH = ID = 1$, поэтому $FG = GD$, $\angle FGH = \angle DGI = \alpha$.

2) $GIAH$ - квадрат, значит $\angle IGH = 90^\circ$, $\angle IGH = \angle FGH + \angle IGF = \alpha + \angle IGF$.

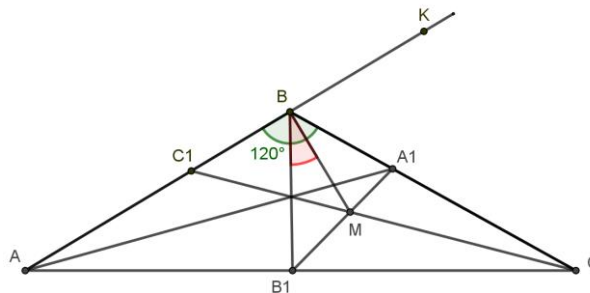
3) $\angle DGF = \angle DGI + \angle IGF = \alpha + \angle IGF = 90^\circ$.

4) $\triangle DFG$ - прямоугольный равнобедренный треугольник, так как $FG = GD$, и значит $\angle DFG = 45^\circ$.

Ответ: 45.

8. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 120^\circ$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 . Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке M. Найти градусную меру угла B_1BM .

Решение.



Продолжим сторону AB за точку B , тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK . Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C , а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Таким образом, B_1A_1 - биссектриса $\angle BB_1C$.

В треугольнике BB_1C точка M - точка пересечения биссектрис B_1A_1 и CC_1 , а значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM = \angle MBC = 30^\circ$.

Ответ: 30.

9. Студенты-химики Иванов и Петров взяли две бутылки с растворами, имеющими различное процентное содержание спирта. Массы жидкостей 3,2 и 4,8 кг. Затем они отлили из бутылок по одинаковому количеству раствора, после чего жидкость, отлитую из бутылки Петрова, перелили к Иванову и наоборот. В результате процентное содержание спирта в обеих бутылках стало одинаковым. Определить сколько граммов раствора переливалось каждым студентом.

Решение.

Пусть x - масса переливаемой жидкости, $p\%$ - процентное содержание спирта в первом растворе, $q\%$ - процентное содержание спирта во втором растворе. Тогда у Иванова осталось после отлития

$3,2 - x$ кг раствора, а в нем $(3,2 - x) \cdot \frac{p}{100}$ спирта, ему перелили x кг раствора, а в нем $x \cdot \frac{q}{100}$ спирта. Процентное содержание спирта в первом растворе после переливаний:
$$\frac{(3,2 - x) \cdot \frac{p}{100} + x \cdot \frac{q}{100}}{3,2} \cdot 100$$

У Петрова осталось после отлития $4,8 - x$ кг раствора, а в нем $(4,8 - x) \cdot \frac{q}{100}$ спирта, ему перелили x кг раствора, а в нем $x \cdot \frac{p}{100}$ спирта. Процентное содержание спирта во втором растворе после переливаний:
$$\frac{(4,8 - x) \cdot \frac{q}{100} + x \cdot \frac{p}{100}}{4,8} \cdot 100$$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{(3,2 - x) \cdot \frac{p}{100} + x \cdot \frac{q}{100}}{3,2} \cdot 100 = \frac{(4,8 - x) \cdot \frac{q}{100} + x \cdot \frac{p}{100}}{4,8} \cdot 100$$

$$\left((3,2 - x) \cdot \frac{p}{100} + x \cdot \frac{q}{100} \right) \cdot 3 = \left((4,8 - x) \cdot \frac{q}{100} + x \cdot \frac{p}{100} \right) \cdot 2$$

$$((3,2 - x) \cdot p + x \cdot q) \cdot 3 = ((4,8 - x) \cdot q + x \cdot p) \cdot 2$$

$$(3,2p - xp + xq) \cdot 3 = (4,8q - xq + xp) \cdot 2$$

$$9,6p - 3xp + 3xq = 9,6q - 2xq + 2xp$$

$$9,6(p - q) = 5x(p - q)$$

$$x = \frac{9,6}{5} = 1,92 \quad (\text{кг})$$

Ответ: 1920.