

**Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», осень 2020 г.
9 класс**

Вариант 1

№1. В лотерейном билете 8 клеточек. В каждую можно поставить любое число от 1 до 8. Клеточка считается заполненной успешно, если ваше число совпало с числом, стоящем на этом месте в выигрышном номере (он единственный и фиксированный, вы его не знаете). Сколько есть способов заполнить лотерейный билет так, чтобы ровно 3 клеточки из 8 были заполнены успешно?

№2. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе средней цены P (в р. за штуку). Показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Рейтинг R вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - kP$, где k – некоторый коэффициент. В таблице даны цены и показатели четырех моделей мясорубок.

Модель мясорубки	Цена мясорубки (р. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4400	0	4	4
Б	6300	1	4	3
В	5500	2	4	3
Г	5300	4	4	1

Определите наименьшее значение k , при котором рейтинг модели Б будет не больше рейтинга модели Г.

№3. Одна из сторон треугольника равна 34, а косинусы углов, прилежащих к этой стороне, равны $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите периметр треугольника.

№4. Найдите последнюю цифру числа 20793^{39633} .

№5. Имеется три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением содержания меди и никеля 4:1. Найдите массу третьего куска, если масса первого из них в два раза больше массы второго.

№6. В равностороннем треугольнике ABC сторона равна 6. Точка К принадлежит отрезку АВ и АК:KB=2:1, на продолжении стороны AC за точку А взята точка М такая что КМ=КС. Определите длину отрезка АМ.

№7. У натурального числа N посчитали произведение всех его натуральных делителей (включая его самого). Оказалось, что максимальная степень двойки, на которую делится полученное число – 2^{178} . Найдите наименьшее N с таким свойством. В ответе укажите четыре последние цифры числа N.

№8. Определите наименьшее значение выражения $x_1^2 + x_2^2$, если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + (8 - a)x - a - 3 = 0$.

№9. Ваня, долго умножая, вычислил 2020! В числе, полученном Ваней, Ксюша слева направо расставила знаки действий: между первой и второй цифрами знак «-», между второй и третьей цифрами знак «+», между третьей и четвертой – «-», и так далее, до конца. Затем Ваня вычислил результат этих действий. В полученном Ваней числе Ксюша опять расставила между цифрами знаки «-» и «+» по такому же правилу. После этого Ваня опять вычислил результат, и так далее. После некоторого количества таких операций было получено однозначное число. Какое?

Решение варианта 1

№1. В лотерейном билете 8 клеточек. В каждую можно поставить любое число от 1 до 8. Клеточка считается заполненной успешно, если ваше число совпало с числом, стоящем на этом месте в выигрышном номере (он единственный и фиксированный, вы его не знаете). Сколько есть способов заполнить лотерейный билет так, чтобы ровно 3 клеточки из 8 были заполнены успешно?

Решение.

Распределение успешных клеточек может произойти ($C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$) способами. В каждом из этих случаев три успешных номера будут иметь фиксированные значения, а остальные 5 номеров могут принимать любые значения, кроме правильных, то есть всего будет 7^5 вариантов заполнить оставшиеся клетки нужным образом, для каждого из этих 56-ти распределений успешных клеточек. Получаем ответ $56 \cdot 7^5$

$$7^5 = 16807$$
$$56 \cdot 16807 = 941192$$

Ответ: 941192.

№2. Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг мясорубок на основе средней цены P (в р. за штуку). Показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Рейтинг R вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - kP$, где k – некоторый коэффициент. В таблице даны цены и показатели четырех моделей мясорубок.

Модель мясорубки	Цена мясорубки (р. за шт.)	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4400	0	4	4
Б	6300	1	4	3
В	5500	2	4	3
Г	5300	4	4	1

Определите наименьшее значение k , при котором рейтинг модели Б будет не больше рейтинга модели Г.

Решение.

$$R_B = 4(2 + 8 + 3) - k \cdot 6300 = 52 - 6300k$$

$$R_G = 4(8 + 8 + 1) - k \cdot 5300 = 68 - 5300k$$

$$\text{Составим неравенство: } 52 - 6300k \leq 68 - 5300k$$

$$-1000k \leq 16$$

$$k \geq -0,016$$

Ответ: при $k = -0,016$.

№3. Одна из сторон треугольника равна 34, а косинусы углов, прилежащих к этой стороне, равны $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите периметр треугольника.

Решение:

1) Для решения задачи проведём дополнительное построение: $BD \perp AC$

$$2) \quad \operatorname{tg}(\angle A) = \frac{BD}{AD} = \frac{\sin(\angle A)}{\cos(\angle A)}; \quad \sin(\angle A) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle A)}; \quad \sin(\angle A) = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17};$$

$$\operatorname{tg}(\angle A) = \frac{8}{17} : \frac{15}{17} = \frac{8}{15}$$

$$3) \quad \operatorname{tg}(\angle C) = \frac{BD}{DC} = \frac{\sin(\angle C)}{\cos(\angle C)}; \quad \sin(\angle C) = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}; \quad \operatorname{tg}(\angle C) = \frac{15}{17} : \frac{8}{17} = \frac{15}{8}$$

$$4) \quad BD = AD \cdot \operatorname{tg}(\angle A) \quad \text{и} \quad BD = DC \cdot \operatorname{tg}(\angle C). \quad \text{Значит} \quad AD \cdot \frac{8}{15} = DC \cdot \frac{15}{8}.$$

Так как $DC = AC - AD$, т.е. $DC = 34 - AD$, то $AD \cdot \frac{8}{15} = (34 - AD) \cdot \frac{15}{8}$. Значит

$$64AD = (34 - AD) \cdot 15^2; \quad (64 + 225)AD = 34 \cdot 15^2; \quad AD = \frac{34 \cdot 15^2}{289} = \frac{2 \cdot 15^2}{17}.$$

$$5) \quad AB = \frac{AD}{\cos(\angle A)}, \quad \text{то есть} \quad AB = \frac{2 \cdot 15^2}{17} : \frac{15}{17} = 2 \cdot 15 = 30.$$

$$6) \quad BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos(\angle A)};$$

$$7) \quad P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 30 + 16 + 34 = 80$$

Ответ: 80

№4. Найдите последнюю цифру числа 20793^{39633} .

Решение. Заметим, что последняя цифра произведения натуральных чисел такая же, как последняя цифра произведения последних цифр этих чисел. Пользуясь этим правилом, составим последовательность последних цифр степеней тройки: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ... Заметим, что в этой последовательности блоки по четыре цифры 3, 9, 7, 1 повторяются, значит, последняя цифра числа 3^{39633} зависит от того, какой остаток будет давать число 39633 при делении на 4 (так как блоки по 4 цифры). Так как остаток 39633 при делении на 4 равен 1, то 3^{39633} заканчивается на такую же цифру, как и 3^1 . Таким образом, последняя цифра числа — это 3.

Ответ: 3

№5. Имеется три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением содержания меди и никеля 4:1. Найдите массу третьего куска, если масса первого из них в два раза больше массы второго.

Решение:

Пусть масса второго куска x кг, тогда масса первого куска $2x$ кг, а масса третьего куска y кг.

	Медь	Никель
1 кусок	$\frac{2}{3} \cdot 2x$	$\frac{1}{3} \cdot 2x$
2 кусок	$\frac{3}{4}x$	$\frac{1}{4}x$

3 кусок	$\frac{5}{6}y$	$\frac{1}{6}y$
---------	----------------	----------------

Масса нового сплава $2x + x + y = 12$, масса меди и никеля в нём соответственно. $\frac{4}{5} \cdot 12 = \frac{48}{5}$ и $\frac{1}{5} \cdot 12 = \frac{12}{5}$

Выпишем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ \frac{2}{3} \cdot 2x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y = 9,6 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 2,4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 16x + 9x + 10y = 115,2 \\ y = 12 - 3x \end{cases}; \begin{cases} 25x + 10y = 115,2 \\ y = 12 - 3x \end{cases}; \quad 25x + 120 - 30x = 115,2;$$

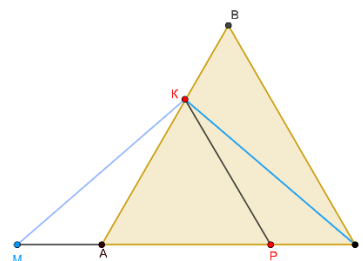
$-5x = -4,8$; $x = 0,96$ масса второго куса, $1,92$ – масса первого куса, $y = 12 - 3x = 9,12$ – масса третьего куса.

Ответ: 9,12 кг.

№6. В равностороннем треугольнике ABC сторона равна 6. Точка K принадлежит отрезку AB и $AK:KB=2:1$, на продолжении стороны AC за точку A взята точка M такая что $KM=KC$. Определите длину отрезка AM.

Решение.

1. Построим точку P : $P \in AC$, $AK=AP=4$.
2. треугольник АКР равнобедренный, т. к. $AK=AP=4$, $\angle A=60^\circ$
 \Rightarrow треугольник АКР равносторонний \Rightarrow
 $KP=AK=AP=4 \Rightarrow PC=2$.
3. $\angle KAM=\angle KPC=120^\circ$,
4. треугольник MKC равнобедренный, т. к. $MK=KC$ по условию.
5. $\angle MKA=\angle CKP=180^\circ - \alpha - 120^\circ$,
6. треугольник MKA = треугольнику KPC двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow MA=PC=2$.



Ответ: 2

№7. У натурального числа N посчитали произведение всех его натуральных делителей (включая его самого). Оказалось, что максимальная степень двойки, на которую делится полученное число – 2^{178} . Найдите наименьшее N с таким свойством. В ответе укажите четыре последние цифры числа N.

Решение:

Пусть в разложение этого числа на простые множители число 2 входит в степени a (очевидно, $a \geq 1$). Кроме того, пусть у этого числа ровно k нечетных делителей ($k \geq 1$, так как всегда есть хотя бы один нечетный делитель – число 1). Тогда каждый из этих k нечетных делителей при умножении на $2^1, 2^2, \dots, 2^a$ порождает a четных делителей, причем их произведение будет содержать число 2 в степени $1+2+\dots+a = a(a+1)/2 = 178$. Решим это уравнение в натуральных числах. Поскольку 178 раскладывается на простые множители как $2 \cdot 89$, одно из чисел $k, a, (a+1)$ кратно 89. Но это не могут быть a или $(a+1)$, так как тогда $a(a+1)/2 \geq 88 \cdot 89/2 > 178$. Значит, k кратно 89. В таком случае, $a(a+1)/2$

= 1 или 2, то есть $a(a+1) = 2$ или 4. Возможен только первый случай, при котором $a = 1$. Тогда $k = 178$. Итак, любое число N , произведение делителей которого содержит 2 ровно в 178 степени, имеет ровно 178 нечетных делителей и содержит в своем разложении на простые множители число 2 ровно в первой степени. Рассмотрим $N/2$ – нечетное число с ровно $k = 178$ делителями. Количество делителей натурального числа равно $(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_m+1)$, где x_1, x_2, \dots, x_m – степени простых множителей в его разложении. У числа $N/2$ это выражение равно $178 = 2 \cdot 89$, так что либо $N/2 = p^{177}$, либо $N/2 = p^{88} \cdot q$, где p и q – нечетные простые числа. Итак, любое подходящее N выглядит либо как $N = 2 \cdot p^{177}$, либо как $N = 2 \cdot p^{88} \cdot q$, и все такие числа подходят. Наименьшее среди них, очевидно, число $2 \cdot 3^{88} \cdot 5 = 10 \cdot 9^{44} = 10 \cdot (10-1)^{44}$. По биному Ньютона: последние три цифры числа $(10-1)^{44}$ – это последние три цифры числа $C_{44}^2 \cdot 10^2 \cdot 1^{42} - C_{44}^1 \cdot 10^1 \cdot 1^{43} + C_{44}^0 \cdot 10^0 \cdot 1^{44}$ (если степень 10 больше 2, то последние три цифры в числе равны 0 и не меняют последние три цифры суммы) = $22 \cdot 43 \cdot 100 - 44 \cdot 10 + 1 = 94161$, то есть 161

Ответ: 1610.

№8. Определите наименьшее значение выражения $x_1^2 + x_2^2$, если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + (8 - a)x - a - 3 = 0$.

Решение. $D = (a - 8)^2 + 4(a + 3) = a^2 - 12a + 76$. $D > 0$ для любых a , значит всегда имеет два корня. По теореме Виета получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 8, \\ x_1 \cdot x_2 = -(a + 3) \end{cases} \quad y = x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 16a + 64 + 2a + 6 = a^2 - 14a + 70.$$

$y = a^2 - 14a + 70$. Функция y квадратичная, график параболы ветви параболы направлены вверх.

Следовательно, наименьшее значение выражение $x_1^2 + x_2^2$ будет принимать при $a=7$ и будет равно 21.

Ответ: 21.

№9. Ваня, долго умножая, вычислил $2020!$ В числе, полученном Ваней, Ксюша слева направо расставила знаки действий: между первой и второй цифрами знак «-», между второй и третьей цифрами знак «+», между третьей и четвертой – «-», и так далее, до конца. Затем Ваня вычислил результат этих действий. В полученном Ваней числе Ксюша опять расставила между цифрами знаки «-» и «+» по такому же правилу. После этого Ваня опять вычислил результат, и так далее. После некоторого количества таких операций было получено однозначное число. Какое?

Решение.

Число $2020!$ кратно 11. Известно, что число кратно 11 тогда и только тогда, когда разность двух сумм цифр в его десятичной записи: стоящих на нечетных местах и стоящих на четных местах, кратно 11. Поэтому комбинация цифр, составленная Ксюшей, опять дает число кратное 11, и так далее. Таким образом, каждое из чисел, получаемых в результате описанных операций, кратно 11. Существует единственное однозначное число, кратное 11, это число 0.

Ответ: 0.