Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2020 г.

8 класс

Вариант 2

1. Насколько сумма $2^2+5^2+8^2+11^2+14^2+\ldots+98^2+101^2$ больше суммы $1^2+4^2+7^2+10^2+13^2+\ldots+97^2+100^2$? (9 баллов)

2. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причем все номера билетов - последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у $\frac{1}{13}$ из них в номере билета есть цифра 6. (9 баллов)

3. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объёма) за 11 часов. Если бы 3 насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил бы четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов 3 насоса могут наполнить второй танкер? (9 баллов)

4. Дан параллелограмм *ABCD*. *K* – середина стороны *BC*, *M* – середина стороны *CD*, *AK* = 18 *см*, *AM* = 9 *см*, $\angle KAM = 60^o$. Найдите длину стороны *AD*. (9 баллов)

5. Предприниматель купил здание и собирается открывать в нём пансионат. В пансионате будут однокомнатные и двухкомнатные номера площадь 18 м2 и 63 м2 соответственно. Общая площадь, которую можно отвести под номера составляет 1053 м2. Предприниматель может поделить эту площадь между однокомнатными и двухкомнатными номерами как хочет. Однокомнатный номер будет стоить 4500 руб. в сутки, а двухкомнатный 6500 руб. в сутки. Какую наибольшую сумму сможет зарабатывать в сутки предприниматель? (12 баллов)

6. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC взяты точки P и Q соответственно так, что $\angle PBC=\frac{1}{3}\angle ABC$ и $\angle QAC=\frac{1}{3}\angle BAC$. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке *T*. Найдите *TP*, если *TQ* = 4 *см*. (12 баллов)

7. Имеются два сплава, состоящие из меди (Cu), цинка (Zn) и олова (Sn). Известно, что I сплав содержит 40% олова, а второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в I и II сплавах одинаковое. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% олова. Определите, сколько кг меди содержится в получившимся сплаве. (12 баллов)

8. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC выбраны точки P и R соответственно так, что *AP* = *CR*. Точка *M* – середина отрезка *PR*. Найдите *BR*, если *AM* = 2. (14 баллов)

9. Найдите сумму всех натуральных чисел, десятичная запись которых оканчивается на три нуля, имеющих ровно 20 натуральных делителей. (14 баллов)

Решение варианта 2

1. Насколько сумма $2^2+5^2+8^2+11^2+14^2+\ldots+98^2+101^2$ больше суммы $1^2+4^2+7^2+10^2+13^2+\ldots+97^2+100^2$? (9 баллов)

Решение

$(2^2+5^2+\ldots+98^2+101^2)-(1^2+4^2+\cdots+97^2+100^2)=(2^2-1^2)+(5^2-4^2)+$
$+\ldots+(98^2-97^2)+(101^2-100^2)=1\cdot(2+1)+1\cdot(5+4)+\ldots+1\cdot(98+97)+$
$+1\cdot(101+100)=3+9+\ldots+195+201=\dfrac{3+201}{2}+34=102\cdot 34=3468$

Ответ: 3468.

2. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причем все номера билетов - последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у $\frac{1}{13}$ из них в номере билета есть цифра 6. (9 баллов)

Решение

Пусть k - число пассажиров, у которых в билете есть цифра 6. Тогда число всех пассажиров равно $13k$. Заметим, что среди любых десяти подряд идущих номеров есть один, содержащий шестерку на конце. Значит, $13k<10(k+1)$, откуда $k<\frac{10}{3}$, $k\le 3$. При $k=3$ искомый набор номеров существует, например 100 007, 100 008, 100 009, ...,100 045.
Ответ: 39.

3. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объёма) за 11 часов. Если бы 3 насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил бы четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов 3 насоса могут наполнить второй танкер? (9 баллов)

Решение

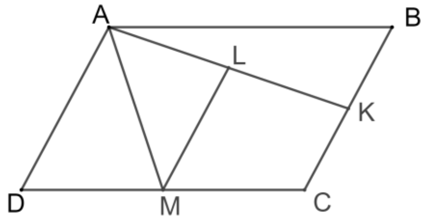
Производительность каждого насоса обозначим x м3/час, объём I танкера V_1 (м3), II танкера V_2 (м3).

$\begin{cases}\frac{V_1}{3x}+\frac{V_2}{12x}=11\\ \frac{V_1}{3x}+\frac{V_2}{4x}=18\end{cases}$ $\begin{cases}4V_1+V_2=11\cdot 12x\\ 4V_1+3V_2=18\cdot 12x\end{cases}$ $5V_2=24\cdot 5x,\quad V_2=24x$

Три насоса наполняют второй танкер за $V_2:(3x)=24x:3x=8$ часов
Ответ: за 8 часов.

4. Дан параллелограмм *ABCD*. *K* – середина стороны *BC*, *M* – середина стороны *CD*, *AK* = 18 *см*, *AM* = 9 *см*, $\angle KAM=60^o$. Найдите длину стороны *AD*. (9 баллов)

Решение



В трапеции *AKCD* проведем среднюю линию *ML*. Он будет параллельна *AD* и *KC*, причем *AL* = 9 *см*. Обозначим *AD*= 2x, тогда *KC*= x. Так как треугольник *ALM* равнобедренный с углом при вершине 60^{o}, то он еще и равносторонний, поэтому LM = 9 *см*. Тогда, используя свойство средней линии трапеции, имеем $\frac{2x+x}{2} = 9$, откуда x = 6 *см*, а значит AD = 12 *см*.

Ответ: 12 *см.*

5. Предприниматель купил здание и собирается открывать в нём пансионат. В пансионате будут однокомнатные и двухкомнатные номера площадь 18 м2 и 63 м2 соответственно. Общая площадь, которую можно отвести под номера составляет 1053 м2. Предприниматель может поделить эту площадь между однокомнатными и двухкомнатными номерами как хочет. Однокомнатный номер будет стоить 4500 руб. в сутки, а двухкомнатный 6500 руб. в сутки. Какую наибольшую сумму сможет зарабатывать в сутки предприниматель? (12 баллов)

Решение

1) Пусть будет x однокомнатных и y двухкомнатных номеров. Так как вся отведённая площадь должна быть использована, то не могут быть только однокомнатные или только двухкомнатные номера.

Тогда получим: $18x + 63y = 1053 \Leftrightarrow 2x + 7y = 117 \Leftrightarrow 2x + 6y + y = 117 \Leftrightarrow$

$2 \cdot (x + 3y) + y = 117$

Пусть $x + 3y = n$, тогда $2n + y = 117 \Leftrightarrow$

$y = 17 - 2n$

Выразим $x - 3y = 7n - 351$.

Учитывая, что $x > 0, y > 0$, получим: $\begin{cases} 117 - 2n > 0, \\ 7n - 351 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} n < 58\frac{1}{2} \\ n > 50\frac{1}{7} \end{cases}$

2) Сумма выручки $S = 4500x + 6500y = 500 \cdot (9x + 13y)$

n	51	52	53	54	55	56	57	58
x	6	13	20	27	34	41	48	55
y	15	13	11	9	7	5	3	1
Σ	<---					434	471	508

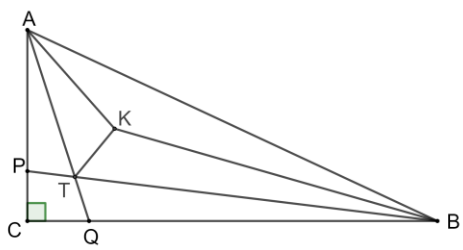
При уменьшении n суммарная выручка предпринимателя уменьшается, тогда наибольшая выручка достигается при x = 55, y = 1,

$S = 500 \cdot (9 \cdot 55 + 13 \cdot 1) = 254\,000$ рублей.

Ответ: 254 000 рублей наибольшая выручка в сутки.

6. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC взяты точки P и Q соответственно так, что $\angle PBC = \frac{1}{3}\angle ABC$ и $\angle QAC = \frac{1}{3}\angle BAC$. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке T. Найдите TP, если TQ = 4 *см*. (12 баллов)

Решение



Соединим точку пересечения K биссектрис треугольника ABT с его вершинами. В результате угол CAB разбился на три равных. Поскольку $\angle ATB = 180^o - \frac{2}{3}(\angle CAB + \angle CBA) = 120^o$, получаем, что $\angle ATP = 60^o$ и $\angle ATK = \frac{1}{2}\angle ATB = 60^o$. Значит треугольники ATP и ATK равны по стороне и двум углам, а тогда TP = TK. Аналогично TQ = TK. Следовательно TP = TQ = 4 *см*.
Ответ: 4 *см*.

7. Имеются два сплава, состоящие из меди (Cu), цинка (Zn) и олова (Sn). Известно, что I сплав содержит 40% олова, а второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в I и II сплавах одинаковое. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% олова. Определите, сколько кг меди содержится в получившимся сплаве. (12 баллов)
Решение.

I сплав		
$(60 - x)$%	x%	40%
Cu	Zn	Sb

II сплав		
26%	x%	$(74 - x)$%
Cu	Zn	Sb

III сплав		
		30%
Cu	Zn	Sb

Олова:150 кг
$\frac{150}{100} \cdot 40 = 60$

Олова: 250 кг
$\frac{250}{100} \cdot (74 - x) =$
$=2{,}5(74 - x)$

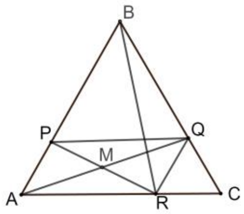
Олова: 400 кг
$\frac{400}{100} \cdot 30 = 120$

Получим уравнение: $60 + 2{,}5 \cdot (74 - x) = 120$,
150 250

$x = 50$ (кг) цинка в II сплаве. Тогда для меди:
100·(60-50)+100·26=15+65=80(кг) меди в III сплаве.
Ответ: 80 кг меди в новом сплаве.

8. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC выбраны точки P и R соответственно так, что $AP = CR$. Точка M – середина отрезка PR. Найдите BR, если $AM = 2$.
(14 баллов)

Решение



На отрезке BC отметим точку Q такую, что $CQ = CR$. Тогда треугольник CQR – равнобедренный с углом 60°, то есть равносторонний. Следовательно, $RQ \parallel AB$. Аналогично, $PQ \parallel AC$. Значит $PQRA$ – параллелограмм. Так как M – середина диагонали PR этого параллелограмма, то она же является и серединой диагонали AQ, а значит $AQ = 2AM$. $ARQB$ – равнобокая трапеция ($QR \parallel AB, AR = BQ$), значит ее диагонали AQ и BR равны. Получаем, что $BR = 2AM = 4$.
Ответ: 4

9. Найдите сумму всех натуральных чисел, десятичная запись которых оканчивается на три нуля, имеющих ровно 20 натуральных делителей. (14 баллов)
Решение.
Так как запись числа n оканчивается на три нуля, оно делится на 1000, то есть на $2^3 \cdot 5^3$. Если n содержит простые множители 2 и 5, ровно в третьих степенях, то количество его делителей должно делиться на $(3+1)\cdot(3+1) = 16$, что невозможно. Значит, либо n делится на $2^4 \cdot 5^3$, либо делится на $2^3 \cdot 5^4$. В таком случае у него уже $(3+1)\cdot(4+1) = 20$ делителей, поэтому никаких других простых множителей в разложении этого числа быть не может. Значит, либо
$n = 2^4 \cdot 5^3 = 2000$, либо $n = 2^3 \cdot 5^4 = 5000$. В решении использована общеизвестная теорема о количестве делителей натурального числа: оно равно произведению увеличенных на 1 степеней всех простых множителей, на которые раскладывается это число.

$$2000 + 5000 = 7000$$

Ответ: 7000.