Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2021 г.

9 класс
Вариант 3

№1 В Университете открылись курсы по математике и физике. В сентябре на курсах по математике занималось не более 850 человек, а количество слушателей физики составляло 90 процентов от математиков. В октябре количество физиков увеличилось на 17 процентов от первоначального числа математиков и число обучающихся физике стало более 760 человек. Чему равно число учащихся на курсах по физике в октябре? (10 баллов)

№2 В трапеции ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Длина меньшего основания BC равна 5, а расстояние от точки O до большего основания равно 3. Найдите площадь треугольника ABO, если косинус угла CDA равен 0,6. (10 баллов)

№3 При каких значениях параметра a неравенство $ax^4 - x^3 + \left(9a^3 + 2a\right)x^2 - 2x + 18a^3 > 0$ верно при любом значении x? (15 баллов)

№4б Дана фигура из условия задачи 4а, т.е. фигура, состоящая из двух пересекающихся пирамид с общим основанием в виде ромба ABCD, вершинами S и M, и одинаковой высотой h=25 $мм$. Вершины S и M находятся с одной стороны относительно плоскости ромба ABCD. SO – высота первой пирамиды, MD – высота второй пирамиды, где O – точка пересечения диагоналей ромба. K – точка пересечения отрезков BM и SD, N – точка пересечения отрезков SO и BM. Вычислите площадь четырёхугольника DKNO (в $мм^2$) (см. условие задачи 4а – раздел материалы заданий Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика» отборочного и заключительного этапов олимпиады, ответы на задания заключительного этапа с указанием выставляемых баллов за каждое задание по графике, прикладному черчению и компьютерному моделированию) (10 баллов)

Решение варианта 3

№1 В Университете открылись курсы по математике и физике. В сентябре на курсах по математике занималось не более 850 человек, а количество слушателей физики составляло 90 процентов от математиков. В октябре количество физиков увеличилось на 17 процентов от первоначального числа математиков и число обучающихся физике стало более 760 человек. Чему равно число учащихся на курсах по физике в октябре?

Решение:

Пусть число математиков в сентябре n человек, по условию $n \le 850$, число физиков в сентябре $\frac{90}{100}n = \frac{9}{10}n$, следовательно, n кратно 10.

Число физиков в октябре увеличилось на $\frac{17}{100}n$, следовательно, n кратно 100, и стало равно $1{,}07n$.

По условию $1{,}07n > 760$, получаем, что $n > 710\frac{30}{107}$.

Из неравенства $710\frac{30}{107} < n \le 850$ и вывода, что n кратно 100, получаем, что $n = 800$, а число физиков в октябре $1{,}07n = 1{,}07 \cdot 800 = 856$.

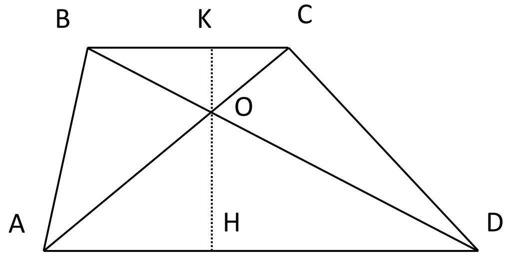
Ответ: 856.

Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно составлена модель задачи и имеются некоторые продвижения в решении
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№2 В трапеции ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Длина меньшего основания BC равна 5, а расстояние от точки O до большего основания равно 3. Найдите площадь треугольника ABO, если косинус угла CDA равен 0,6.

Решение.

Пусть OH и OK – перпендикуляры к основания трапеции. По условию $\mathrm{OH} = 3, \mathrm{BC} = 5$.



По свойтству трапеции:

1) $\frac{S_{BCO}}{S_{AOD}} = \left(\frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OH}}\right)^2$, т.е. $\frac{0{,}5\mathrm{BC}\cdot\mathrm{OK}}{0{,}5AD\cdot OH} = \left(\frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OH}}\right)^2 <=> BC \cdot OH = AD \cdot OK.$
2) $S_{ABO} = S_{DCO} => \ S_{ABCD} = S_{BCO} + S_{ADO} + 2S_{ABO}.$

3) $S_{ABCD} = 0{,}5(AD + BC)(OK + OH) = 0{,}5AD \cdot OK + 0{,}5AD \cdot OH + 0{,}5BC \cdot OK + 0{,}5BC \cdot OH = S_{BCO} + S_{ADO} + \mathrm{BC} \cdot \mathrm{OH} \Rightarrow 2S_{ABO} = \mathrm{BC} \cdot \mathrm{OH}$.

Поэтому, $S_{ABO} = 0{,}5\mathrm{BC} \cdot \mathrm{OH} = 7{,}5$. Заметим, что величина угла D, в задаче на ответ не влияет.

Ответ: 7,5.

Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованное и грамотно выполненное решение задачи.
5	При верном и обоснованном ходе решения допущена арифмитическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
2	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты (описана связь отношения высот OK и OH с подобием треуголников COB и AOD), дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует вышеперечисленным требованиям.

№3 При каких значениях параметра a неравенство $ax^4 - x^3 + \left(9a^3 + 2a\right)x^2 - 2x + 18a^3 > 0$ верно при любом значении x?

Решение: Разложим на множители левую часть неравенства

$$ax^4 - x^3 + \left(9a^3 + 2a\right)x^2 - 2x + 18a^3 > 0$$

$$\left(ax^4 + 2ax^2\right) - \left(x^3 + 2x\right) + \left(9a^3x^2 + 18a^3\right) > 0$$

$$ax^2\left(x^2 + 2\right) - x\left(x^2 + 2\right) + 9a^3\left(x^2 + 2\right) > 0$$

$$\left(x^2 + 2\right)\left(ax^2 - x + 9a^3\right) > 0.$$

Первая скобка всегда имеет смысл и принимает значение больше нуля, следовательно, условие задачи выполняется, если $ax^2 - x + 9a^3 > 0$ при любом значении x.

Это верно при выполнении двух условий: $\begin{cases} a > 0 \\ D = 1 - 36a^4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty\right)$

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty\right)$

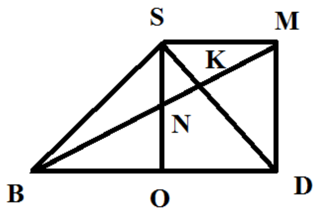
Баллы	Критерии выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	При обоснованном решении ответ отличается от правильного из-за арифметической ошибки или при правильном ответе имеются недостатки обоснования
5	Верно начато решение задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

№4б Дана фигура из условия задачи 4а, т.е. фигура, состоящая из двух пересекающихся пирамид с общим основанием в виде ромба ABCD, вершинами S и M, и одинаковой высотой h=25 $мм$. Вершины S и M находятся с одной стороны относительно плоскости ромба ABCD. SO – высота первой пирамиды, MD – высота второй пирамиды, где O – точка пересечения диагоналей ромба. K – точка пересечения отрезков BM и SD, N – точка пересечения отрезков SO и BM. Вычислите площадь четырёхугольника DKNO (в $мм^2$).

Решение. 1) ΔBON подобен треугольнику BDM (по двум углам) ⟹ $\frac{ON}{MD}=\frac{BO}{BD}=\frac{1}{2} \Rightarrow SN=ON \Longrightarrow \frac{SN}{SO}=\frac{1}{2}$. Треугольник MKS подобен треугольнику BKD ⇒ $\frac{SK}{KD}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SK}{SD}=\frac{1}{3}$.

По теореме о треугольниках, имеющих равный угол $S_{SKN}=\frac{SN}{SO}\cdot\frac{SK}{SD}\cdot S_{SOD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{h^2}{2}=\frac{h^2}{12}$.

Тогда $S_{DKNO}=S_{SOD}-S_{SKN}=\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{12}=\frac{5h^2}{12}=\frac{5\cdot 25^2}{12}=\frac{3125}{12}$.



Ответ: $\frac{3125}{12}$.

Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Верно определён метод решения задачи, но допущена ошибка в вычислениях или решение не доведено до конца.
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий