Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2021 г.

11 класс

Вариант № 1

1. Решите уравнение

$$x+\frac{21}{x}=[x]+\frac{21}{[x]}.$$

Здесь $[x]$ – целая часть числа *x*, т.е. $[x]\in Z,\quad [x]\le x<[x]+1.$ (10 баллов)

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK:KC=5:4.$ Около треугольника ABK описана окружность с центром в точке *O*, причем $OC=32\sqrt{2/3}.$ Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите $OD,$ если $\angle APB=\angle BAC,\ AC=24.$ (12 баллов)

3. Найдите все значения параметра *a*, при которых система

$$\begin{cases}(x+2)^2+\left(\dfrac{|x-1|}{x-1}+a\right)^2=25,\\ \log_{x+a+3}\dfrac{4x-3a+35}{24}\le 0\end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра *a*. (12 баллов)

4б. Найдите угол между прямой SA и плоскостью AMB (см. условие задачи 4а – раздел материалы заданий Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика» отборочного и заключительного этапов олимпиады, ответы на задания заключительного этапа с указанием выставляемых баллов за каждое задание по графике, прикладному черчению и компьютерному моделированию). (10 баллов)

Решение варианта № 1

1. Решите уравнение $x+\frac{21}{x}=[x]+\frac{21}{[x]}.$

Здесь $[x]$ – целая часть числа *x*, т.е. $[x]\in Z,\quad [x]\le x<[x]+1.$ (10 баллов)

Решение

$$x-[x]+\frac{21}{x}-\frac{21}{[x]}=0\Leftrightarrow (x-[x])\left(1-\frac{21}{x[x]}\right)=0\Leftrightarrow x\ne 0,\ [x]\ne 0, 1)\ x\in Z-\{0\},$$

2) $x[x]=21, [x]=n, n\le x<n+1.$ Если

$$n>0\Rightarrow n^2\le xn<n^2+n\Rightarrow n^2\le 21<n^2+n\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{21}\le n\le\sqrt{21},\\ n^2+n-21>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<n\le\sqrt{21},\\ n>\dfrac{-1+\sqrt{85}}{2}.\end{cases}$$

Поскольку $4<\sqrt{21}<5,\ 9<\sqrt{85}<10, 8<-1+\sqrt{85}<9,\ 4<\frac{-1+\sqrt{85}}{2}<4,5,$ то целых решений система не имеет. Если

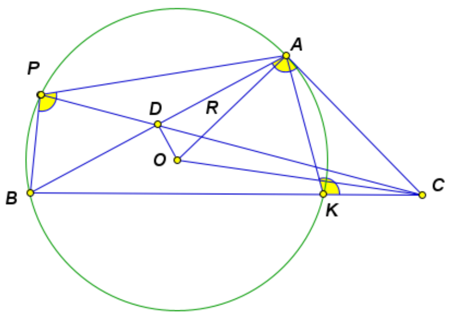
$$n<0\Rightarrow n^2+n<xn\le n^2\Rightarrow n^2+n<21\le n^2\Rightarrow\begin{cases}n\le-\sqrt{21},\\ n>\dfrac{-1-\sqrt{85}}{2}.\end{cases}$$ Поскольку

$$-5<-\sqrt{21}<-4{,}5,\ 9<\sqrt{85}<10, -11<-1-\sqrt{85}<-10,\ -5{,}5<\frac{-1-\sqrt{85}}{2}<-5,$$ то имеем целое решение $n=-5\Rightarrow nx=21,\ x=-4{,}2.$

Ответ: любое целое число, отличное от 0, и -4,2.

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK:KC=5:4.$ Около треугольника ABK описана окружность с центром в точке *O*, причем $OC=32\sqrt{2/3}.$ Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP>CD$. Найдите $OD,$ если $\angle APB=\angle BAC,\ AC=24.$ (12 баллов)

Решение $\angle APB = \angle BAC,\ \angle APB = \angle AKC,$ $\angle AKC = \angle BAC,\ \angle KAC = \angle ABC.$ Отрезок AC является отрезком касательной к окружности. Обозначим R радиус описанной около ΔABK окружности.



$$R = \sqrt{OC^2 - AC^2} = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$$AC^2 = CK \cdot CB,\ CK = 4x,\ CB = 9x,\ 24^2 = 36x^2,\ x = 4,\ CK = 16,\ CB = 36,\ BK = 20.$$

$$\Delta ABC \approx \Delta AKC \quad \Rightarrow$$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{AK} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad AB = 3y, \quad AK = 2y.$$

Найдем сторону $AB.$ По формуле Герона имеем

$$S_{ABK} = \frac{1}{4}\sqrt{(5y+20)(5y-20)(y+20)(20-y)} = \frac{5}{4}\sqrt{(y^2-16)(400-y^2)}.$$

С другой стороны $S_{ABK} = \dfrac{AB \cdot AK \cdot BK}{4R} = \dfrac{3y^2\sqrt{15}}{4}.$ Приходим к уравнению

$5\sqrt{(y^2-16)(400-y^2)} = 3y^2\sqrt{15}.$ Пусть $t = y^2.$ Тогда $5(t-16)(400-t) = 27t^2,$ и

$t^2 - 65t + 1000 = 0,\ t_1 = 40,\ t_2 = 25.$ Следовательно, $x_1 = 2\sqrt{10},\ x_2 = 5,$ и

1) $AB = 6\sqrt{10},$ 2) $AB = 15.$ Поскольку $OD = \sqrt{R^2 - AD^2},$ то

1) $OD = 5\sqrt{2/3},$ 2) $OD = \dfrac{11\sqrt{15}}{6}.$

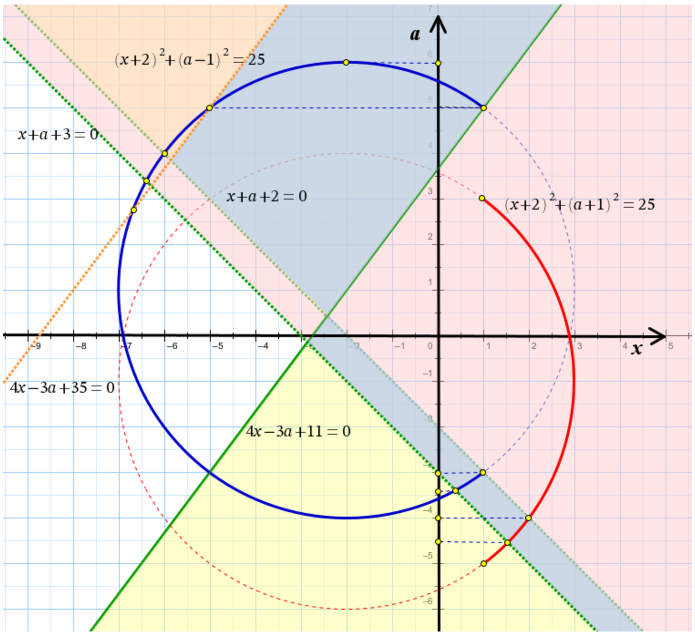
Ответ: 1) $5\sqrt{2/3},$ 2) $\dfrac{11\sqrt{15}}{6}.$

3. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (x+2)^2 + \left(\dfrac{|x-1|}{x-1} + a\right)^2 = 25, \\ \log_{x+a+3} \dfrac{4x-3a+35}{24} \le 0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра a. (12 баллов)

Решение В системе координат *Oxa* изобразим решение системы.



Построим множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы

$$(x+2)^2+\left(\frac{|x-1|}{x-1}+a\right)^2=25.$$

При $x>1$ имеем $(x+2)^2+(1+a)^2=25$, т.е. дугу окружности с центром в точке $(-2;-1)$ и радиусом, равным 5.

При этом $x=-2+\sqrt{25-(1+a)^2}$.

При $x<1$ имеем $(x+2)^2+(-1+a)^2=25$, т.е. дугу окружности с центром в точке $(-2;1)$ и радиусом, равным 5.

При этом $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2}$.

Построим множество точек, удовлетворяющих неравенству системы

$\log_{x+a+3}\dfrac{4x-3a+35}{24}\le 0$. Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+a+3>0, \\ x+a+2\ne 0, \\ 4x-3y+35>0, \\ (4x-3a+11)(x+a+2)\le 0. \end{cases}$$

Границами области являются точки прямых $4x-3a+11=0$, $4x-3a+35=0$, $x+a+3=0$, $x+a+2=0$. Неравенство $\log_{x+a+3}\dfrac{4x-3a+35}{24}\le 0$ выполняется в заштрихованной области.

Найдем ординату правой точки пересечения окружности $(x+2)^2+(1+a)^2=25$ с прямой $x+a+2=0$. Подставим $x=-a-2$ в уравнение окружности $a^2+(1+a)^2=25\Rightarrow a^2+a-12=0,\ a=-4$. Найдем ординату правой точки пересечения окружности $(x+2)^2+(1+a)^2=25$ с прямой $x+a+3=0$. Подставим $x=-a-3$ в уравнение окружности $2(1+a)^2=25\Rightarrow\ a=-1-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, при $a\in\left(-1-\dfrac{5\sqrt{2}}{2};-4\right)$ исходная система имеет одно решение $x=-2+\sqrt{25-(1+a)^2}$. Найдем ординату правой точки пересечения окружности $(x+2)^2+(a-1)^2=25$ с прямой $x+a+2=0.$ Подставим $x=-a-2$ в уравнение окружности $a^2+(a-1)^2=25 \Rightarrow a^2-a-12=0, a=-3$. Найдем ординату правой точки пересечения окружности $(x+2)^2+(a-1)^2=25$ с прямой $x+a+3=0.$ Подставим $x=-a-3$ в уравнение окружности $2a^2=23 \Rightarrow a=-\frac{\sqrt{46}}{2}.$ Следовательно, при $a\in\left(-\frac{\sqrt{46}}{2};-3\right)$ исходная система имеет одно решение $x=-2+\sqrt{25-(a-1)^2}.$

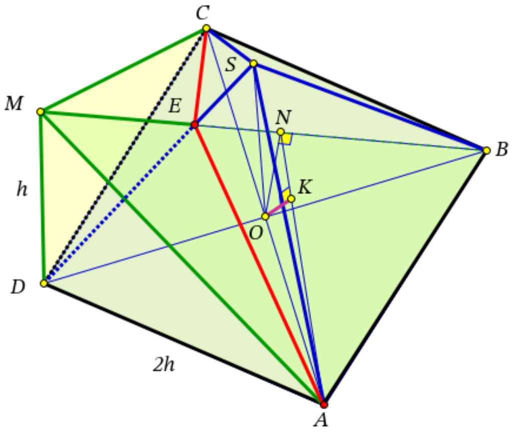
Теперь найдем ординату правой точки пересечения окружности $(x+2)^2+(a-1)^2=25$ с прямой $4x-3a+11=0.$ Подставим $x=(3a-11)/4$ в уравнение окружности $(a-1)^2=16 \Rightarrow a=5.$

Далее найдем ординату правой точки пересечения окружности $(x+2)^2+(a-1)^2=25$ с прямой $4x-3a+35=0.$ Подставим $x=(3a-35)/4$ в уравнение окружности $9(a-9)^2+16(a-1)^2=400 \Rightarrow a=5.$ Следовательно, при $a\in(5;6)$ исходная система имеет два различных решения $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2};$ при $a=6$ система имеет одно решение $x=-2.$

Ответ: при $a\in\left(-1-\frac{5\sqrt{2}}{2};-4\right)$ одно решение $x=-2+\sqrt{25-(1+a)^2};$ при $a\in\left(-\frac{\sqrt{46}}{2};-3\right)$ одно решение $x=-2+\sqrt{25-(a-1)^2};$ при $a\in(5;6)$ два различных решения $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2};$ при $a=6$ одно решение $x=-2.$

4б. Найдите угол между прямой SA и плоскостью AMB (см. условие задачи 4а). (10 баллов)

Решение Пусть L – точка пересечения MB и $SO.$ Поскольку $SL:LO=1:1,$ то расстояние $\rho(S, AMB)$ от точки S до плоскости AMB равно расстоянию $\rho(O, AMB)$. Имеем $AO\perp DSB,$ $MB\in DSB, ON\perp MB,$ ON - проекция AN на плоскость DSB, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $AN\perp MB,$ $MB\perp AON.$



Если $OK\perp AN,$ то $OK\perp AMB,$ и $OK=\rho(O, AMB)=\rho(S, AMB).$

$$ON=\frac{h\cdot h/2}{\sqrt{h^2+h^2/4}}=\frac{h}{\sqrt{5}},\ OK=\frac{\sqrt{3}h\cdot h/\sqrt{5}}{\sqrt{3h^2+h^2/5}}=\frac{\sqrt{3}h}{4},\ \ SP=\rho(S,AMB)=\frac{\sqrt{3}h}{4}.$$

Обозначим угол между прямой SA и плоскостью AMB через α.

Тогда $\sin\alpha=\dfrac{SP}{SA}=\dfrac{\sqrt{3}}{8},\quad \alpha=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{8}.$ **Ответ:** $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.