Заключительный этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», весна 2021 г.

10 класс

Вариант № 1

1. Найдите такое наименьшее натуральное число $k > 2021$, чтобы для любых натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, не делящихся на 5, число $n_1^{\,4} + n_2^{\,4} + \ldots + n_k^{\,4} + 2021k$ было кратно 5. (10 баллов)

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK : KC = 5 : 4.$ Около треугольника ABK описана окружность с центром в точке O, причем $OC = 32\sqrt{2/3}.$ Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP > CD$. Найдите $OD,$ если $\angle APB = \angle BAC,\ AC = 24.$ (12 баллов)

3. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (x+2)^2 + \left(\dfrac{|x-1|}{x-1} + a\right)^2 = 25, \\ 4x^2 - 3a^2 + ax + 19x + 5a + 22 \le 0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра a. (12 баллов)

4б. Найдите расстояние от точки E до плоскости ASB, если E – точка пересечения прямых, по которым пересекаются боковые грани пирамид $SABCD$ и $MABCD$ (см. условие задачи 4а – раздел материалы заданий Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика» отборочного и заключительного этапов олимпиады, ответы на задания заключительного этапа с указанием выставляемых баллов за каждое задание по графике, прикладному черчению и компьютерному моделированию). (10 баллов)

Решение варианта № 1

1. Найдите такое наименьшее натуральное число $k > 2021$, чтобы для любых натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, не делящихся на 5, число $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_k^4 + 2021k$ было кратно 5. (10 баллов)

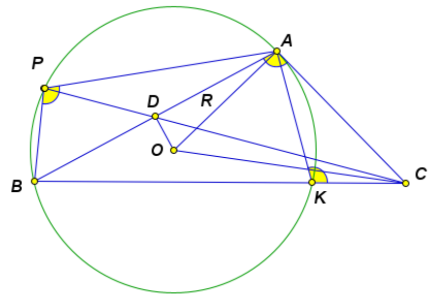
Решение

Пусть n – натуральное число, которое не делится на 5. Его можно представить в виде $n = 5l + r$, где l – целое неотрицательное число, $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда число $n^4 = 625l^4 + 4 \cdot 125l^3 r + 6 \cdot 25l^2 r^2 + 4 \cdot 5lr^3 + r^4$. Тогда остаток от деления числа n^4 на 5 равен остатку от деления на 5 числа r^4. Поскольку $r^4 \in \{1, 16, 81, 256\}$, то остаток от деления на 5 этого числа равен 1. Следовательно, $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_k^4 + 2021k = 5m_1 + 1 + 5m_2 + 1 + \ldots + 5m_k + 1 + 2021k$, и $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_k^4 + 2021k = 5m + 2022k.$ Таким образом, k должно быть кратно 5. Наименьшее число $k > 2021$, делящееся на 5, равно 2025.

Ответ: 2025.

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK : KC = 5 : 4.$ Около треугольника ABK описана окружность с центром в точке O, причем $OC = 32\sqrt{2/3}.$ Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P, причем $CP > CD$. Найдите OD, если $\angle APB = \angle BAC,\ AC = 24.$ (12 баллов)

Решение.



$\angle APB = \angle BAC,\quad \angle APB = \angle AKC,\ \angle AKC = \angle BAC,$ $\angle KAC = \angle ABC.$ Отрезок AC является отрезком касательной к окружности. Обозначим R радиус описанной около ΔABK окружности.

$$R = \sqrt{OC^2 - AC^2} = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

$AC^2 = CK \cdot CB,\quad CK = 4x,\ CB = 9x,\ 24^2 = 36x^2,\ x = 4,$

$CK = 16,\ CB = 36,\ BK = 20.$

$\Delta ABC \approx \Delta AKC \quad \Rightarrow$

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{AK} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad AB = 3y, \quad AK = 2y.$$

Найдем сторону $AB.$ По формуле Герона имеем

$$S_{ABK} = \frac{1}{4}\sqrt{(5y+20)(5y-20)(y+20)(20-y)} = \frac{5}{4}\sqrt{(y^2-16)(400-y^2)}.$$

С другой стороны $S_{ABK} = \dfrac{AB \cdot AK \cdot BK}{4R} = \dfrac{3y^2\sqrt{15}}{4}.$ Приходим к уравнению

$5\sqrt{(y^2-16)(400-y^2)} = 3y^2\sqrt{15}.$ Пусть $t = y^2.$ Тогда $5(t-16)(400-t) = 27t^2$, и $t^2 - 65t + 1000 = 0,\ t_1 = 40,\ t_2 = 25.$ Следовательно, $x_1 = 2\sqrt{10},\ x_2 = 5,$ и

1) $AB = 6\sqrt{10},$ 2) $AB = 15.$ Поскольку $OD = \sqrt{R^2 - AD^2}$, то

1) $OD = 5\sqrt{2/3},$ 2) $OD = \dfrac{11\sqrt{15}}{6}.$ **Ответ:** 1) $5\sqrt{2/3},$ 2) $\dfrac{11\sqrt{15}}{6}.$

3. Найдите все значения параметра a, при которых система

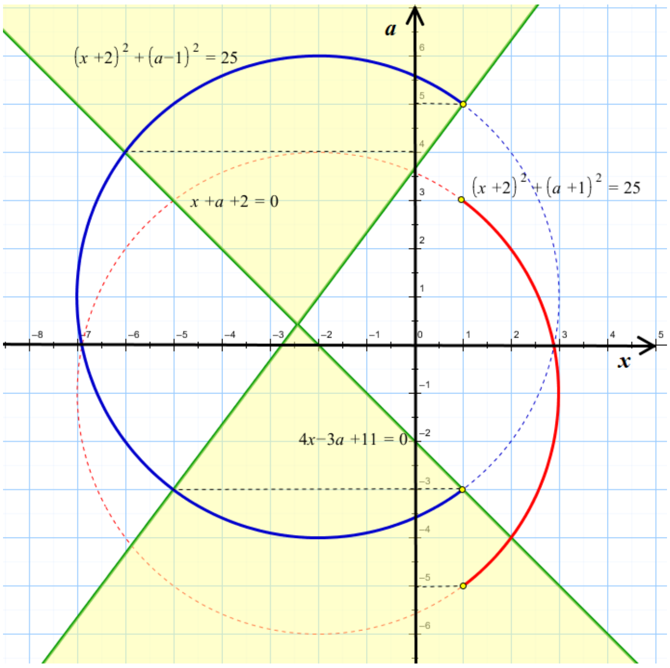
$$\begin{cases} (x+2)^2+\left(\dfrac{|x-1|}{x-1}+a\right)^2=25, \\ 4x^2-3a^2+ax+19x+5a+22\le 0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра a. (12 баллов)

Решение. В системе координат Oxa изобразим решение системы.
Построим множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы $(x+2)^2+\left(\dfrac{|x-1|}{x-1}+a\right)^2=25$. При $x>1$ имеем $(x+2)^2+(1+a)^2=25$, т.е. дугу окружности с центром в точке $(-2;-1)$ и радиусом, равным 5. При этом $x=-2+\sqrt{25-(1+a)^2}$.

При $x<1$ имеем $(x+2)^2+(-1+a)^2=25$, т.е. дугу окружности с центром в точке $(-2;1)$ и радиусом, равным 5.

При этом $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2}$.



Построим множество точек, удовлетворяющих неравенству системы $4x^2-3a^2+ax+19x+5a+22\le 0$.
Разложим на множители левую часть неравенства, рассматривая ее как квадратный трехчлен относительно x: $4x^2+(a+19)x-3a^2+5a+22\le 0$,

$D=(a+19)^2+48a^2-80a-352=49a^2-42a+9=(7a-3)^2$, $x_{1/2}=\dfrac{-a-19\pm(7a-3)}{8}$,

$x_1=\dfrac{3a-11}{4}$, $x_2=-a-2$, $\Rightarrow (4x-3a+11)(x+a+2)\le 0$. Границей области являются прямые $4x-3a+11=0$, $x+a+2=0$. Неравенство выполняется в заштрихованной области.

Система имеет решения при $a\in(-5;-3]\cup[4;6]$. Выпишем решения:

1) $a\in(-5;-4)$ имеем $x=-2+\sqrt{25-(1+a)^2}$; 2) $a=-4$ имеем $x_1=-2,\ x_2=2$;

3) $a\in(-4;-3)$ имеем $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2}$; 4) $a=-3$ имеем $x=-5$;

5) $a\in[4;5]$ имеем $x_1=-2-\sqrt{25-(a-1)^2}$; 6) $a\in(5;6)$ имеем $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2}$;

7) $a=6$ имеем $x=-2$.

Ответ: $a\in(-5;-3]\cup[4;6]$. Решения: 1) $a\in(-5;-4)$, $x_1=-2+\sqrt{25-(1+a)^2}$;

2) $a=-4$, $x_1=-2,\ x_2=2$; 3) $a\in(-4;-3)$, $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2}$;

4) $a=-3$, $x_1=-5$; 5) $a\in[4;5]$, $x_1=-2-\sqrt{25-(a-1)^2}$;

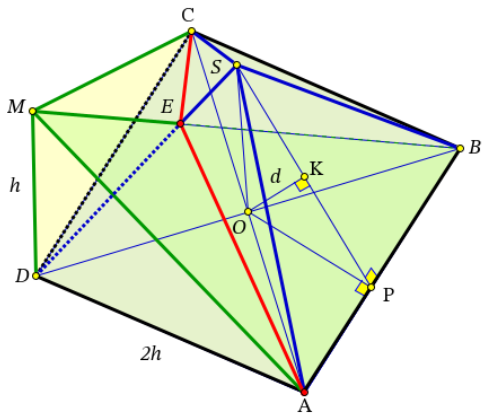
6) $a\in(5;6)$, $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{25-(a-1)^2}$; 7) $a=6$, $x=-2$.

4б. Найдите расстояние от точки E до плоскости ASB, если E – точка пересечения прямых, по которым пересекаются боковые грани пирамид $SABCD$ и $MABCD$ (см. условие задачи 4а).

(10 баллов)

Решение. Поскольку $ES:DS=1:3,$ то расстояние $\rho(E,\,ASB)$ от точки E до плоскости ASB в три раза меньше расстояния $\rho(D,\,ASB)$. Поскольку $DB:OB=2:1,$ то расстояние $\rho(D,\,ASB)$ от точки D до плоскости ASB в два раза больше расстояния $\rho(O,\,ASB)$. Таким образом,

$$\rho(E,\,ASB)=\frac{1}{3}\rho(D,\,ASB)=\frac{2}{3}\rho(O,\,ASB).$$



В плоскости основания $ABCD$ проведем $OP\perp AB,$ $OP=\dfrac{\sqrt{3}h}{2}.$ Расстояние $\rho(O,\,ASB)=d$ равно высоте прямоугольного треугольника SOP. Поскольку $d=\dfrac{h\cdot\sqrt{3}h/2}{\sqrt{h^2+3h^2/4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}h,$ то

$$\rho(E,\,ASB)=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}h=\frac{2\sqrt{21}}{21}h=\frac{50\sqrt{21}}{21}.$$

Ответ: $\dfrac{50\sqrt{21}}{21}$ *мм.*