

**Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование
и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2020 г.**

11 класс

Вариант № 2

1. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 км и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 км. Сколько автобусов при этом могло его обогнать? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.) В ответ напишите сумму всех возможных решений. (5 баллов)

2. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = 4(1 - |x - 2|), \\ z = 4(1 - |y - 2|), \\ u = 4(1 - |z - 2|), \\ x = 4(1 - |u - 2|)? \end{cases}$$

(5 баллов)

3. Известно, что $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 10$, где $x_k \geq 0$ при любых $k = 1, 2, \dots, n$. Какое наибольшее значение может принимать величина

$$2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 12x_3x_4 + \dots + (n^2 - n)x_{n-1}x_n? \quad (6 \text{ баллов})$$

4. Имеются по два одинаковых треугольных стекла 9 цветов со всеми сторонами по 50 см. Сколько способами можно вставить 4 стекла в треугольную раму со сторонами по 1 м так, чтобы стёкла, имеющие общую сторону, различались цветом? (12 баллов)

5. С каким остатком число 12345678 в степени 456 делится на 11? (12 баллов)

6. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y = 0,25(x^2 + 6x + 1)$; две из них проходят через точку $A(-1; -2)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC . Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC ? (12 баллов)

7. Медиана BD треугольника ABC равна $\sqrt{785}$. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная стороне AB . На этой прямой лежит точка O , $\angle BOC = 90^\circ$. Окружность с центром в точке O , проходящая через точку A , пересекает прямую BO в точках M и N . Найдите площадь треугольника OAC , если $MC = 10\sqrt{17}$, тангенс угла CAB равен $7/9$. (16 баллов)

8. При каком максимальном значении параметра a ($a \neq 0$) уравнение

$$(\cos x + a)^7 - (\cos^7 x + a^7) = \frac{7}{2}a(\cos^2 x + a \cos x + a^2)^2$$

$(0; 2\pi)$

имеет более двух корней на интервале $(0; 2\pi)$? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра. В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на π . (16 баллов)

9. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник ABC , причем $AB = BC = 9$, $AC = 12$. Высотой пирамиды $SABC$ является отрезок SO , где O – точка пересечения прямой, проходящей через вершину B параллельно стороне AC , и прямой, проходящей через C перпендикулярно стороне AC . Расстояние от центра вписанной в треугольник ABC окружности до плоскости, содержащей боковую грань BSC , равно $4\sqrt{5}/5$. Найдите квадрат объема пирамиды $SABC$. (16 баллов)

Решение варианта № 2

1. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 км и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 км. Сколько автобусов при этом могло его обогнать? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.) В ответ напишите сумму всех возможных решений. (5 баллов)

Решение. Пусть T – интервалы времени, через которые идут автобусы.

$$1) 5T \leq 4, \quad 7T > 4 \Rightarrow \frac{4}{7} < T \leq \frac{4}{5}$$

$$2) 7T \leq 7, \quad 9T > 7 \Rightarrow \frac{7}{9} < T \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{7}{9} < T \leq \frac{4}{5}$$

$$(n-1)T \leq 17 < (n+1)T \Rightarrow \frac{17}{T} - 1 < n \leq \frac{17}{T} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{17 \cdot 5}{4} - 1 \leq \frac{17}{T} - 1 < n \leq \frac{17}{T} + 1 < \frac{17 \cdot 9}{7} + 1 \Rightarrow$$

$$20,25 < n < 22\frac{6}{7} \Rightarrow n = 21; 22$$

Ответ: 43.

2. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = 4(1 - |x - 2|), \\ z = 4(1 - |y - 2|), \\ u = 4(1 - |z - 2|), \\ x = 4(1 - |u - 2|) \end{cases}$$

(5 баллов)

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = 4(1 - |x - 2|)$.

Тогда система эквивалентна следующей

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = f(y), \\ u = f(z), \\ x = f(u). \end{cases}$$

Количество решений этой системы

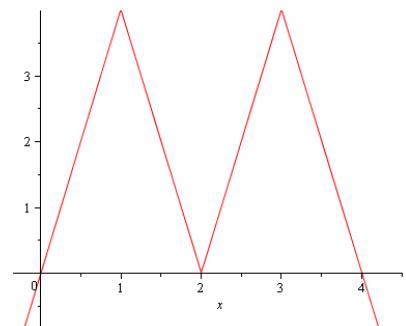
совпадает с количеством различных решений уравнения

$x = f(f(f(f(x)))$. Если $x > 4$, то решений уравнение не имеет, поскольку $f(x) \leq 4$. При

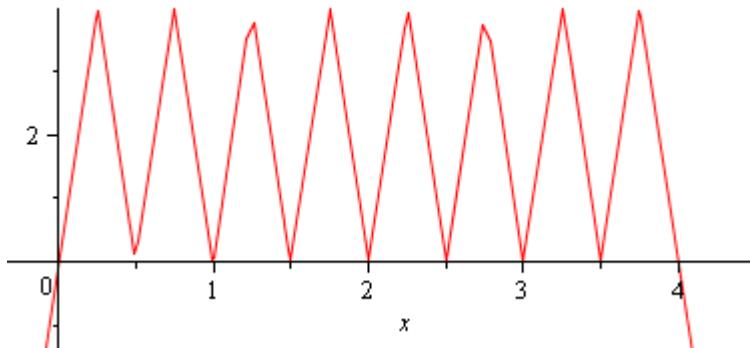
$x \in (-\infty; 0]$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x) < x$ для $x < 0$. Следовательно,

$f(f(x)) < f(x) < x < 0 \Rightarrow f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x < 0 \Rightarrow$

$f(f(f(f(x)))) < f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x < 0$, уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ не имеет решений при $x < 0$. Рассмотрим это уравнение при $x \in [0; 4]$. График функции $y = f(x)$



имеет два перехода от 0 до 4 и обратно, уравнение $x = f(x)$ будет иметь 4 решения. График функции $y = f(f(x))$



имеет 8 переходов от 0 до 4 и обратно, уравнение $x = f(f(f(x)))$ будет иметь 16 решений. График функции $y = f(f(f(f(x))))$ имеет 32 перехода от 0 до 4 и обратно, уравнение $x = f(f(f(f(x))))$ будет иметь 64 решения.

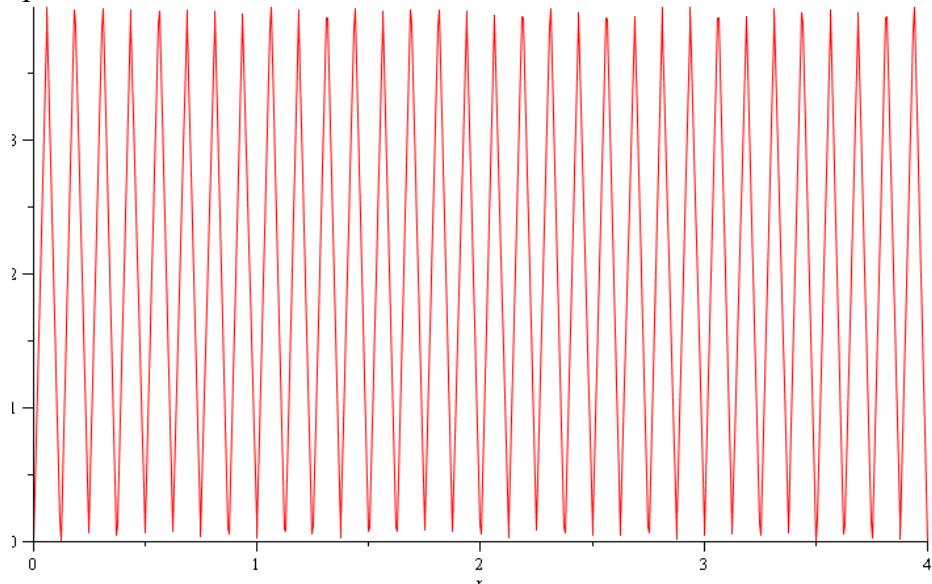


График функции $y = f(f(f(f(f(x))))$ имеет 128 переходов от 0 до 4 и обратно, уравнение $x = f(f(f(f(f(x))))$ будет иметь 256 решений.

Ответ: 256.

3. Известно, что $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 10$, где $x_k \geq 0$ при любых $k = 1, 2, \dots, n$. Какое наибольшее значение может принимать величина

$$2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 12x_3x_4 + \dots + (n^2-n)x_{n-1}x_n? \quad (6 \text{ баллов})$$

Решение.

$$\begin{aligned} & 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 12x_3x_4 + \dots + (n^2-n)x_{n-1}x_n \leq \\ & \leq (x_1 + 3x_3 + 5x_5 + \dots)(2x_2 + 4x_4 + 6x_6 + \dots) = ab, \quad a + b = 10, \\ & 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 12x_3x_4 + \dots + (n^2-n)x_{n-1}x_n \leq a(10 - a) = 10a - a^2 \leq 25. \end{aligned}$$

Значение 25 достигается, например, при $x_1 = 2x_2 = 5, x_k = 0, k = 3, 4, 5, \dots, n$.

Ответ: 25.

4. Имеются по два одинаковых треугольных стекла 9 цветов со всеми сторонами по 50 см. Сколькими способами можно вставить 4 стекла в треугольную раму со сторонами по 1 м так, чтобы стёкла, имеющие общую сторону, различались цветом? (12 баллов)

Решение.

Цвет центрального стекла можно выбрать 9 способами. Каждое из трех угловых стекол (соседних с центральным, но не граничащих друг с другом) можно выбрать 8 способами. Итого $9 \cdot 8^3 = 4608$ способов. Но нужно исключить $9 \cdot 8 = 72$ случая, когда все три угловых стекла одного цвета.

Ответ: 4536.

5. С каким остатком число 12345678 в степени 456 делится на 11? (12 баллов)

Решение.

$$12345678 \equiv -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 = 4 \pmod{11}; \quad 4^5 = 1024 \equiv -1 + 0 - 2 + 4 = 1 \pmod{11};$$

$$N \equiv 4^{456} = 4^{5 \cdot 91 + 1} = 1024^{91} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{11}.$$

Ответ: 4.

6. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y = 0,25(x^2 + 6x + 1)$; две из них проходят через точку $A(-1; -2)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC . Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC ? (12 баллов)

Решение.

$$y = 0,25(x^2 + 6x + 1), \quad A(-1; -2)$$

Уравнение касательной к графику функции:

$$y = \frac{1}{4}x_0^2 + \frac{3}{2}x_0 + \frac{1}{4} + \frac{x_0+3}{2} \cdot (x - x_0), \text{ или}$$

$$y = -\frac{1}{4}x_0^2 + \frac{1}{4} + \frac{x_0+3}{2} \cdot x.$$

Для касательных, проходящих через точку A ,

$$-2 = -\frac{1}{4}x_0^2 + \frac{1}{4} - \frac{x_0+3}{2}.$$

Отсюда

$$x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0, \quad x_0 = \begin{cases} 1, \\ -3. \end{cases}$$

Уравнения касательных, проходящих через точку A : 1)

$$y = -2; \quad 2). \quad y = 2x$$

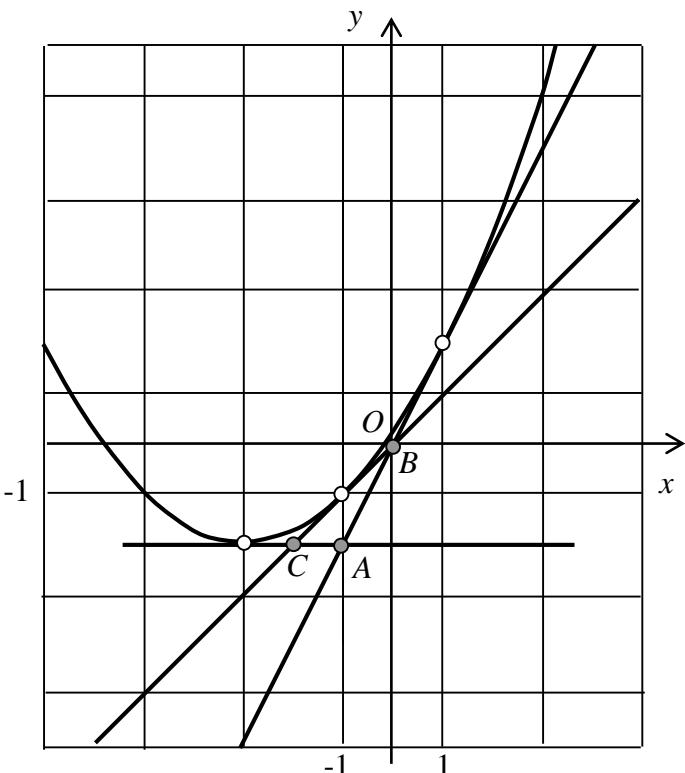
Уравнение прямой CB :

$$y = -\frac{1}{4}x_*^2 + \frac{1}{4} + \frac{x_*+3}{2} \cdot x,$$

где x_* – абсцисса точки касания с графиком функции.

В точке $C(y_C; x_C) \quad y_C = -2$.

$$\text{Тогда } -2 = -\frac{1}{4}x_*^2 + \frac{1}{4} + \frac{x_*+3}{2} \cdot x_C. \quad \text{Отсюда } x_C = \frac{x_*^2 - 9}{4(x_* + 3)} \cdot 2 = \frac{x_* - 3}{2}.$$



В точке $B(x_B; y_B)$ $-\frac{1}{4}x_*^2 + \frac{1}{4} + \frac{x_* + 3}{2} \cdot x_B = 2x_B$, $\frac{x_* - 1}{2} \cdot x_B = \frac{x_*^2 - 1}{4}$, $x_B = \frac{x_* + 1}{2}$, $y_B = 2x_B = x_* + 1$.
Площадь треугольника ABC равна

$$S_{\Delta ABC} = 0,5 \cdot (x_A - x_C) \cdot (y_B - y_A) = \frac{1}{2} \cdot \left(-1 - \frac{x_* - 3}{2} \right) \cdot (x_* + 1 + 2) = \frac{1}{4} (3 - 2x_* - x_*^2) = S(x_*)$$

$$S'(x_*) = 0,25(-2 - 2x_*) = 0 \text{ при } x_* = -1. \max S_{\Delta ABC} = S(-1) = 0,25 \cdot (3 + 2 - 1) = 1.$$

Ответ: 1.

7. Медиана BD треугольника ABC равна $\sqrt{785}$. Через вершину В проведена прямая, перпендикулярная стороне AB . На этой прямой лежит точка O , $\angle BOC = 90^\circ$. Окружность с центром в точке O , проходящая через точку A , пересекает прямую BO в точках M и N . Найдите площадь треугольника OAC , если $MC = 10\sqrt{17}$, тангенс угла CAB равен $7/9$. (16 баллов)

Решение. $a = BD = \sqrt{785}$, $b = MC = 10\sqrt{17}$, $\alpha = \angle CAB$, $\tan \alpha = 7/9$.

В треугольнике ABC имеем

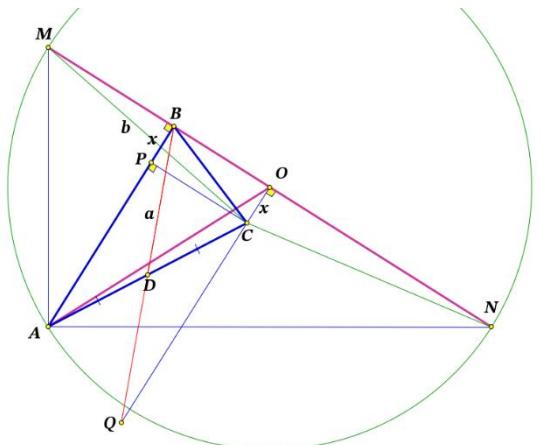
$$2AB^2 + 2BC^2 = 4BD^2 + AC^2,$$

$$AC = \sqrt{2(AB^2 + BC^2) - 4a^2},$$

$$AB^2 + BC^2 = AO^2 - BO^2 + BC^2 =$$

$$= AO^2 + OC^2 = b^2, AC = \sqrt{2b^2 - 4a^2} = \sqrt{260}.$$

$$\tan \alpha = 7/9 \Rightarrow \cos \alpha = 9/\sqrt{130},$$



$$PC \perp AB, PC = BO, AP = AC \cos \alpha = 9\sqrt{2}, CP = 7\sqrt{2}. Q = (BD) \cap (OC),$$

$$AB = CQ = x + 9\sqrt{2}, CO = BP = x, BQ^2 = BO^2 + OQ^2, 4a^2 = 2 \cdot 7^2 + (2x + 9\sqrt{2})^2,$$

$$3140 = 98 + (2x + 9\sqrt{2})^2, x = 15\sqrt{2}, CO = 15\sqrt{2}. S_{AOC} = BO \cdot CO / 2 = 105.$$

Ответ: 105.

8. При каком максимальном значении параметра a ($a \neq 0$) уравнение

$$(\cos x + a)^7 - (\cos^7 x + a^7) = \frac{7}{2}a(\cos^2 x + a \cos x + a^2)^2$$

имеет более двух корней на интервале $(0; 2\pi)$? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра. В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на π . (16 баллов)

Решение.

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
(y+a)^7 - (y^7 + a^7) &= (y+a)(y^6 + 6y^5a + 15y^4a^2 + 20y^3a^3 + 15y^2a^4 + 6ya^5 + a^6 - \\
&\quad - y^6 + y^5a - y^4a^2 + y^3a^3 - y^2a^4 + ya^5 - a^6) = \\
&= (y+a)(7ay^5 + 14y^4a^2 + 21y^3a^3 + 14y^2a^4 + 7ya^5) = \\
&= 7ay(y+a)(y^4 + 2y^3a + 3y^2a^2 + 2ya^3 + a^4) = 7ay(y+a)(y^2 + ay + a^2)^2
\end{aligned}$$

Сделаем у исходном уравнении замену $y = \cos x$, тогда исходное уравнение примет вид

$$7ay(y+a)(y^2 + ay + a^2)^2 = \frac{7}{2}a(y^2 + ay + a^2)^2 \Rightarrow y(y+a) = \frac{1}{2} \text{ или}$$

$2y^2 + 2ay - 1 = 0$. Дискриминант уравнения $D/4 = a^2 + 2 > 0$, следовательно уравнение

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2}}{2}$$

всегда имеет два корня разных знаков.

$$-1 \leq \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2}}{2} < 0 < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2}}{2} \leq 1$$

Проверим выполнение неравенств:

$$\begin{aligned}
\frac{-a - \sqrt{a^2 + 2}}{2} \geq -1 \Rightarrow 2 - a \geq \sqrt{a^2 + 2} \Rightarrow \begin{cases} 2 - a > 0 \\ a^2 - 4a + 4 \geq a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 2 \\ a \leq 1/2 \end{cases} \Rightarrow a \leq \frac{1}{2} \\
\frac{-a + \sqrt{a^2 + 2}}{2} \leq 1 \Rightarrow 2 + a \geq \sqrt{a^2 + 2} \Rightarrow \begin{cases} 2 + a > 0 \\ a^2 + 4a + 4 \geq a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -2 \\ a \geq -1/2 \end{cases} \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Следовательно, когда параметр a рассматривается на отрезке $[-1/2, 1/2]$ уравнение относительно косинуса имеет 2 различных корня (разных знаков). При этом на интервале $(0; 2\pi)$ будет находиться 4 корня, если $a \in (-1/2; 1/2)$

$$\begin{array}{ll}
x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-a - \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right), & x = \arccos\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right), \\
x = \arccos\left(\frac{-a - \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right), & x = 2\pi - \arccos\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 2}}{2}\right)
\end{array}$$

$$x = \pi, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$$

При $a = 1/2$ только три корня лежат в указанном интервале $(0; 2\pi)$. При значениях параметра больше $1/2$ существует только косинус, принимающий положительные значения, и исходное уравнение будет иметь не более двух корней. Значит, условию задачи удовлетворяет только $a = 1/2$. Сумма полученных корней 3π .

Ответ: 3.

9. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник ABC , причем $AB = BC = 9$, $AC = 12$. Высотой пирамиды $SABC$ является отрезок SO , где O – точка пересечения прямой, проходящей через вершину B параллельно стороне AC , и прямой, проходящей через C перпендикулярно стороне AC . Расстояние от центра вписанной в треугольник ABC окружности до плоскости, содержащей боковую грань BSC , равно $4\sqrt{5}/5$. Найдите квадрат объема пирамиды $SABC$. (16 баллов)

Решение.

$$b = AB = BC = 9, a = AC = 12.$$

Расстояние от центра вписанной в треугольник ABC окружности до плоскости, содержащей боковую грань BSC обозначим d .

$$d = GN, d = 4\sqrt{5}/5.$$

В прямоугольном треугольнике BOC :

$$BO = \frac{a}{2}, \quad BC = b, \quad CO = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

$$OL = \frac{BO \cdot OC}{BC} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b}.$$

$KL = r$, где r – радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)},$$

$$\Delta OLN \sim \Delta OKG \Rightarrow \frac{ON}{d} = \frac{OL}{KL} \Rightarrow ON = \frac{d \cdot OL}{KL} = \frac{d \cdot (a + 2b)}{2b}.$$

$$SO = h, \quad ON\sqrt{h^2 + OL^2} = h \cdot OL,$$

$$h = \frac{ON \cdot OL}{\sqrt{OL^2 - ON^2}} = \frac{d(a+2b)}{2b} \cdot \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2(4b^2 - a^2)}{16b^2} - \frac{d^2(a+2b)^2}{4b^2}}},$$

$$h = \frac{ad(a+2b)\sqrt{4b^2-a^2}}{2b\sqrt{a^2(4b^2-a^2)-4d^2(a+2b)^2}}, \quad V_{SABC} = \frac{a^2d(a+2b)(4b^2-a^2)}{24b\sqrt{a^2(4b^2-a^2)-4d^2(a+2b)^2}} = 24\sqrt{5},$$

$$V^2 = 2880.$$

Ответ: 2880.

