Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика) общеобразовательный предмет «Математика», осень 2020 г.

11 класс

Вариант № 1

1. В некотором городе поезда метро отправляются через строго одинаковые интервалы времени. Наблюдатель, придя на платформу в произвольный момент времени, в течение 24 минут насчитал 7 поездов, проехавших мимо. Во второй раз, появившись на платформе также в произвольный момент времени, он насчитал в течение 45 минут 11 поездов. Сколько поездов может проследовать мимо наблюдателя в течение 115 минут? (Продолжительность стоянки считаем равной нулю.) В ответ напишите сумму всех возможных решений. (5 баллов)

2. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y=8|x-1|(1-|x-1|), \\ z=8|y-1|(1-|y-1|), \\ u=8|z-1|(1-|z-1|), \\ x=8|u-1|(1-|u-1|)? \end{cases}$$

(5 баллов)

3. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 3. Какое наибольшее значение может принимать величина $x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + \cdots + x_{n-2}x_n$? (6 баллов)

4. Даны 10 разных камней, из них 5 белых, 3 синих и 2 красных. Сколькими способами можно выбрать 5 камней, чтобы никакой цвет не составлял большинства из выбранных?

(12 баллов)

5. Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3-5t-3=0$. Найти $x^4+y^4+z^4$. (12 баллов)

6. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=0,25\left(x^2+2x-3\right)$; две из них проходят через точку $A(1;-1)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC? (12 баллов)

7. Медиана *BD* треугольника *ABC* равна $\sqrt{392,5}$. Через вершину В проведена прямая, перпендикулярная стороне *AB*. На этой прямой лежит точка *O*, $\angle BOC=90°$. Окружность с центром в точке *O*, проходящая через точку *A*, пересекает прямую *BO* в точках *M* и *N*. Найдите площадь треугольника *MAN*, если $MC=5\sqrt{34}$, тангенс угла *CAB* равен $7/9$. (16 баллов)

8. При каком минимальном значении параметра *a* уравнение $\sqrt{2}\sin(2y+\frac{\pi}{2})+a\sin(y-\frac{\pi}{4})=a\cos(\frac{\pi}{4}-y)$ имеет более двух корней на интервале $(0;2\pi)$? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра. В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на π. (16 баллов)

9. Основанием пирамиды *SABC* служит равнобедренный треугольник *ABC*, причем $AB=BC=9\sqrt{5}$, $AC=12\sqrt{5}$. Высотой пирамиды *SABC* является отрезок *SO*, где *O* – точка пересечения прямой, проходящей через вершину *B* параллельно стороне *AC*, и прямой, проходящей через *C* перпендикулярно стороне *AC*. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC*, если $SO=4\sqrt{5}$. (16 баллов)

Решение варианта № 1

1. В некотором городе поезда метро отправляются через строго одинаковые интервалы времени. Наблюдатель, придя на платформу в произвольный момент времени, в течение 24 минут насчитал 7 поездов, проехавших мимо. Во второй раз, появившись на платформе также в произвольный момент времени, он насчитал в течение 45 минут 11 поездов. Сколько поездов может проследовать мимо наблюдателя в течение 115 минут? (Продолжительность стоянки считаем равной нулю.) В ответ напишите сумму всех возможных решений. (5 баллов)

Решение. T – интервалы времени, через которые отправляются поезда метро.

$$1)\ 6T \le 24,\quad 8T > 24 \quad \Rightarrow \quad 3 < T \le 4$$

$$2)\ 10T \le 45,\quad 12T > 45 \quad \Rightarrow \quad 3{,}75 < T \le 4{,}5$$

$$\Rightarrow 3{,}75 < T \le 4$$

$$(n-1)T \le 115 < (n+1)T \Rightarrow \frac{115}{T} - 1 < n \le \frac{115}{T} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{115}{4} - 1 \le \frac{115}{T} - 1 < n \le \frac{115}{T} + 1 < \frac{115}{3{,}75} + 1 \Rightarrow$$

$$27{,}75 < n < 31\frac{2}{3} \Rightarrow n = 28;\ 29;\ 30;\ 31$$

Ответ: 118.

2. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = 8|x-1|(1-|x-1|), \\ z = 8|y-1|(1-|y-1|), \\ u = 8|z-1|(1-|z-1|), \\ x = 8|u-1|(1-|u-1|)? \end{cases}$$

(5 баллов)

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = 8|x-1|(1-|x-1|)$.

Тогда система эквивалентна следующей

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = f(y), \\ u = f(z), \\ x = f(u). \end{cases}$$

Количество решений этой системы совпадает с количеством различных решений уравнения $x = f(f(f(f(x).$ Если $x > 2,$ то решений уравнение не имеет, поскольку $f(x) \le 2.$ При $x \in (-\infty; 0]$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x) < x$ для $x < 0.$ Следовательно,

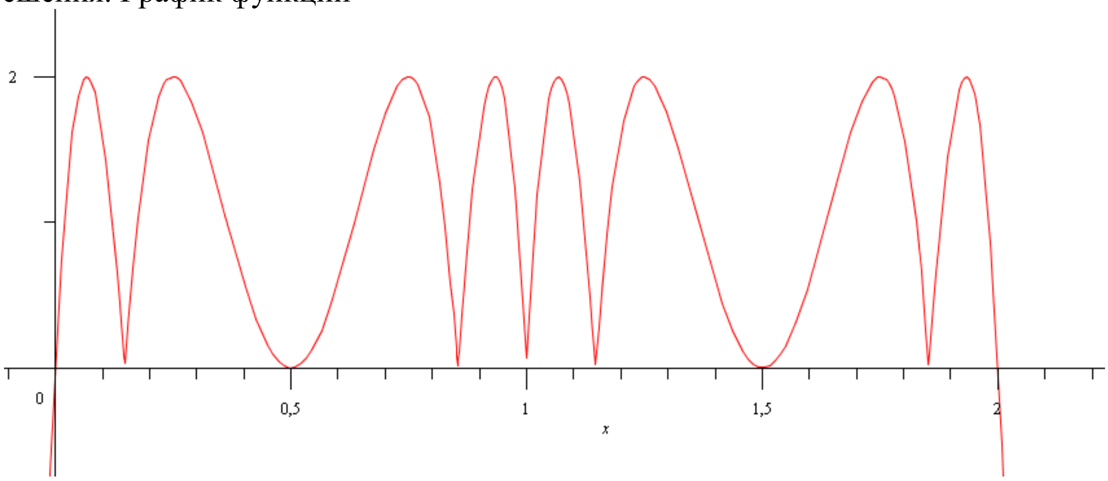
$$f(f(x)) < f(x) < x < 0 \Rightarrow f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x < 0 \Rightarrow$$

$$f(f(f(f(x)))) < f(f(f(x))) < f(f(x)) < f(x) < x < 0,$$

уравнение $f(f(f(f(x)))) = x$ не имеет решений при $x < 0.$

Рассмотрим это уравнение при $x \in [0; 2].$

График функции $y=f(x)$ имеет два перехода от 0 до 2 и обратно, уравнение $x=f(x)$ будет иметь 4 решения. График функции $y=f(f(x))$



имеет 8 переходов от 0 до 2 и обратно, уравнение $x=f(f(x))$ будет иметь 16 решений. График функции $y=f(f(f(x)))$ имеет 32 перехода от 0 до 2 и обратно, уравнение $x=f(f(f(x)))$ будет иметь 64 решения.

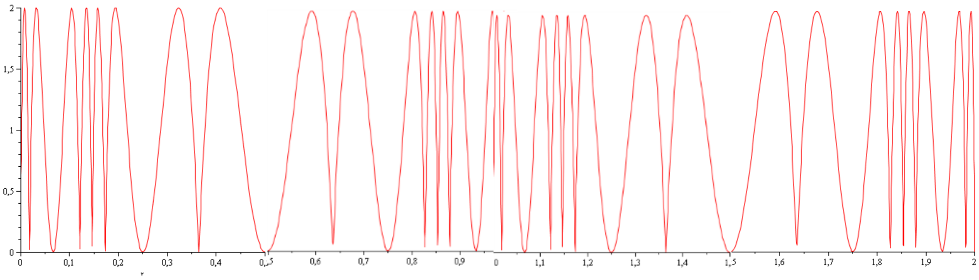


График функции $y=f(f(f(f(x))))$ имеет 128 переходов от 0 до 2 и обратно, уравнение $x=f(f(f(f(x))))$ будет иметь 256 решений.

Ответ: 256.

3. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 3. Какое наибольшее значение может принимать величина $x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+\cdots+x_{n-2}x_n$? (6 баллов)

Решение.

$$x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+\cdots+x_{n-2}x_n \le$$
$$\le (x_1+x_2+x_5+x_6+\cdots)(x_3+x_4+x_7+x_8+\cdots)=ab, \qquad a+b=3,$$
$$x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+\cdots+x_{n-2}x_n \le a(3-a)=3a-a^2 \le 2{,}25.$$

Значение 2,25 достигается, например, при $x_1=x_3=1{,}5, x_k=0, k=2,4,5,\ldots,n$.

Ответ: 2, 25.

4. Даны 10 разных камней, из них 5 белых, 3 синих и 2 красных. Сколькими способами можно выбрать 5 камней, чтобы никакой цвет не составлял большинства из выбранных? (12 баллов)

Решение. Имеем три варианта:

2Б + 2Ч + 1К — число способов $C_5^2\cdot C_3^2\cdot C_2^1=10\cdot3\cdot2=60$

2Б + 1Ч + 2К — число способов $C_5^2\cdot C_3^1\cdot C_2^2=10\cdot3\cdot1=30$

1Б + 2Ч + 2К — число способов $C_5^1\cdot C_3^2\cdot C_2^2=5\cdot3\cdot1=15$

Ответ: 105.

5. Пусть $x,\ y,\ z$ – корни уравнения $t^3-5t-3=0$. Найти $x^4+y^4+z^4$. (12 баллов)

Решение.

Многочлен имеет 3 разных действительных корня, т. к. $P(-100)<0$, $P(-1)>0$, $P(1)<0$, $P(100)>0$. По теореме Виета $x+y+z=0$, $xy+xz+yz=-5$, $xyz=-3$.

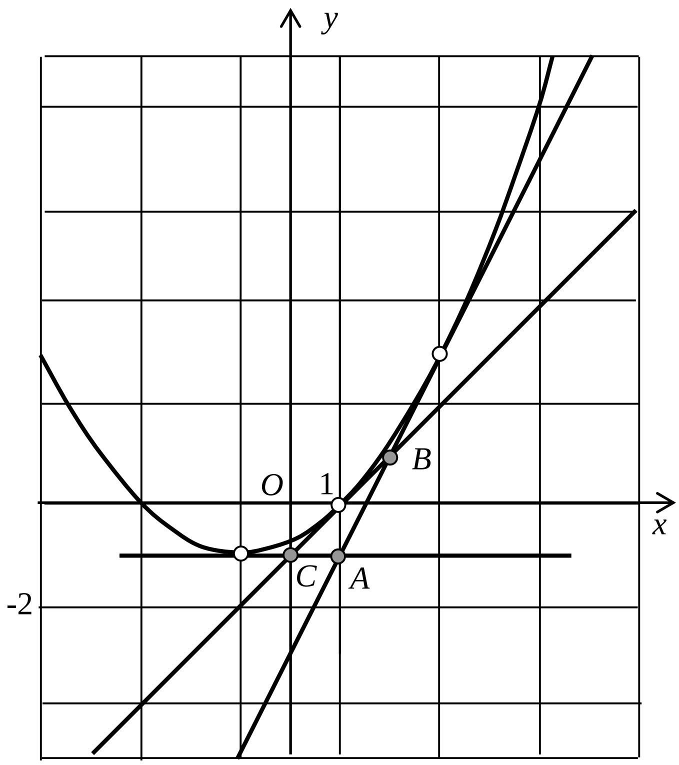
$$x^4+y^4+z^4=x\cdot x^3+y\cdot y^3+z\cdot z^3=x(5x-3)+y(5y-3)+z(5z-3)=$$
$$=5((x+y+z)^2-2(xy+xz+yz))-3(x+y+z)=5(0-2(-5))-0=50.$$

Ответ: 50.

6. Стороны треугольника ΔABC лежат на касательных к графику функции $y=0,25\left(x^2+2x-3\right)$; две из них проходят через точку $A(1;-1)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC. Какую наибольшую площадь может иметь ΔABC? (12 баллов)

Решение.

$y=0,25\left(x^2+2x-3\right)$; $A(1;-1)$



Уравнение касательной к графику функции:

$y=\frac{1}{4}x_0^2+\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{4}+\frac{x_0+1}{2}\cdot(x-x_0)$, или

$y=-\frac{1}{4}x_0^2-\frac{3}{4}+\frac{x_0+1}{2}\cdot x$.

Для касательных, проходящих через точку A,

$-1=-\frac{1}{4}x_0^2-\frac{3}{4}-\frac{x_0+1}{2}$. Отсюда $x_0^2-2x_0-3=0$,

$x_0=\left[\begin{array}{l}3,\\-1.\end{array}\right.$ Уравнения касательных, проходящих через точку A: 1) $y=-1$; 2). $y=2x-3$ Уравнение прямой CB:

$y=-\frac{1}{4}x_*^2-\frac{3}{4}+\frac{x_*+1}{2}\cdot x$,

где x_* – абсцисса точки касания с графиком функции.

В точке $C(y_C;x_C)$ $y_C=-1$.

Тогда $-1=-\frac{1}{4}x_*^2-\frac{3}{4}+\frac{x_*+1}{2}\cdot x_C$. Отсюда $x_C=\frac{x_*^2-1}{4(x_*+1)}\cdot 2=\frac{x_*-1}{2}$.

В точке $B(x_B;y_B)$ $-\frac{1}{4}x_*^2-\frac{3}{4}+\frac{x_*+1}{2}\cdot x_B=2x_B-3$, $\frac{x_*-3}{2}\cdot x_B=\frac{x_*^2-9}{4}$, $x_B=\frac{x_*+3}{2}$, $y_B=2x_B-3=x_*$.

Площадь треугольника ABC равна

$$S_{\Delta ABC}=0,5\cdot(x_A-x_C)\cdot(y_B-y_A)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x_*-1}{2}\right)\cdot(x_*+1)=\frac{1}{4}\left(3+2x_*-x_*^2\right)=S(x_*).$$

$S'(x_*)=0,25(2-2x_*)=0$ при $x_*=1$. $\max S_{\Delta ABC}=S(1)=0,25\cdot(3+2-1)=1$.

Ответ: 1.

7. Медиана BD треугольника ABC равна $\sqrt{392{,}5}$. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная стороне AB. На этой прямой лежит точка O, $\angle BOC = 90°$. Окружность с центром в точке O, проходящая через точку A, пересекает прямую BO в точках M и N. Найдите площадь треугольника MAN, если $MC = 5\sqrt{34}$, тангенс угла CAB равен $7/9$. (16 баллов)

Решение. $a = BD = \sqrt{392{,}5},\ b = MC = 5\sqrt{34},\ \alpha = \angle CAB, \operatorname{tg}\alpha = 7/9.$

В треугольнике ABC имеем

$$2AB^2 + 2BC^2 = 4BD^2 + AC^2,$$

$$AC = \sqrt{2(AB^2 + BC^2) - 4a^2},$$

$$AB^2 + BC^2 = AO^2 - BO^2 + BC^2 =$$

$$= AO^2 + OC^2 = b^2,\ AC = \sqrt{2b^2 - 4a^2} = \sqrt{130}.$$

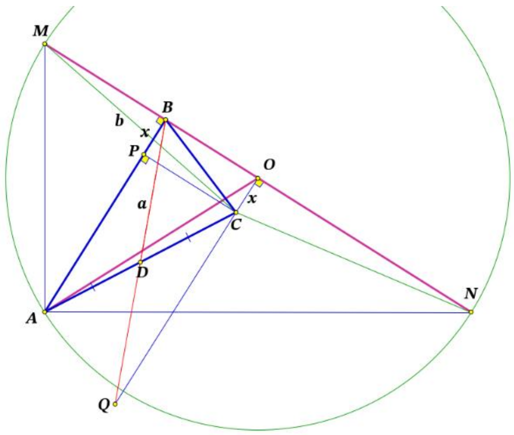
$$\operatorname{tg}\alpha = 7/9 \Rightarrow \cos\alpha = 9/\sqrt{130},$$

$$PC \perp AB,\ PC = BO,\ AP = AC\cos\alpha = 9,\ CP = 7.$$

$$Q = (BD) \cap (OC),$$

$$AB = CQ = x + 9,\ CO = BP = x,$$

$$BQ^2 = BO^2 + OQ^2,\ 4a^2 = 7^2 + (2x+9)^2,$$



$$1570 = 49 + (2x+9)^2,\ x = 15,\ AB = 24,\ AO = 25,\ MN = 50.\ S_{MAN} = AB \cdot MN/2 = 600.$$

Ответ: 600.

8. При каком минимальном значении параметра a уравнение $\sqrt{2}\sin(2y + \frac{\pi}{2}) + a\sin(y - \frac{\pi}{4}) = a\cos(\frac{\pi}{4} - y)$ имеет более двух корней на интервале $(0;2\pi)$? Найдите корни уравнения при указанном значении параметра. В ответе запишите сумму полученных корней уравнения, деленную на π. (16 баллов)

Решение.

Используя формулы тригонометрии, получим

$$\sqrt{2}\cos(2y) + a(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y) = 0$$ или

$$\cos(2y) - a\cos y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2 y - a\cos y - 1 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение, для этого найдем дискриминант $D = a^2 + 8 > 0$, т.к. он всегда положителен, то $\cos y = \frac{a \pm \sqrt{a^2+8}}{4}$, произведение полученных двух косинусов отрицательно.

Проверим выполнение неравенств: $-1 \le \frac{a - \sqrt{a^2+8}}{4} < 0 < \frac{a + \sqrt{a^2+8}}{4} \le 1$:

$$\frac{a-\sqrt{a^2+8}}{4} \ge -1 \Rightarrow a+4 \ge \sqrt{a^2+8} \Rightarrow \begin{cases} a+4>0 \\ a^2+8a+16 \ge a^2+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>-4 \\ a \ge -1 \end{cases} \Rightarrow \quad a \ge -1$$

$$\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4} \le 1 \Rightarrow 4-a \ge \sqrt{a^2+8} \Rightarrow \begin{cases} 4-a>0 \\ a^2-8a+16 \ge a^2+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<4 \\ a \le 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a \le 1$$

Следовательно, когда параметр a рассматривается на отрезке [-1, 1] уравнение относительно косинуса имеет 2 различных корня (разных знаков). При этом на интервале $(0;2\pi)$ будет находиться 4 корня, если $a \in (-1;1)$

$$y = 2\pi - \arccos\left(\frac{a-\sqrt{a^2+8}}{4}\right), \qquad y = 2\pi - \arccos\left(\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}\right),$$

$$y = \arccos\left(\frac{a-\sqrt{a^2+8}}{4}\right), \qquad y = \arccos\left(\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}\right)$$

При $a=-1$ только три корня лежат в указанном интервале $y=\pi,\ y=\frac{\pi}{3},\ y=\frac{5\pi}{3}$. При значениях параметра меньше -1 существует только косинус, принимающий положительные значения, и исходное уравнение будет иметь не более двух корней. Значит, условию задачи удовлетворяет только $a=-1$. Сумма полученных корней 3π.

Ответ: 3.

9. Основанием пирамиды *SABC* служит равнобедренный треугольник *ABC*, причем $AB = BC = 9\sqrt{5}$, $AC = 12\sqrt{5}$. Высотой пирамиды *SABC* является отрезок *SO*, где *O* – точка пересечения прямой, проходящей через вершину *B* параллельно стороне *AC*, и прямой, проходящей через *C* перпендикулярно стороне *AC*. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC*, если $SO = 4\sqrt{5}$.

(16 баллов)

Решение.

$b = AB = BC = 9\sqrt{5}$, $a = AC = 12\sqrt{5}$, $h = SO = 4\sqrt{5}.$

Расстояние от центра вписанной в треугольник *ABC* окружности до плоскости, содержащей боковую грань *BSC* обозначим *d*.

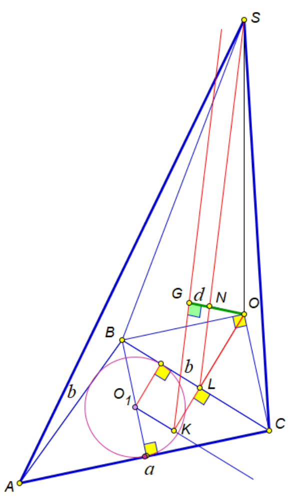
$d = GN$.

В прямоугольном треугольнике *BOC*:

$$BO = \frac{a}{2}, \quad BC = b, \quad CO = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

$$OL = \frac{BO \cdot OC}{BC} = \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4b}.$$

$KL = r,$ где r – радиус вписанной в треугольник *ABC* окружности.



$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2(a+2b)},$$

$$\Delta OLN \sim \Delta OKG \quad \Rightarrow \quad \frac{ON}{d} = \frac{OL}{KL} \quad \Rightarrow \ d = \frac{ON \cdot KL}{OL} = \frac{ON \cdot 4b}{2(a+2b)}.$$

$$ON = \frac{h \cdot OL}{\sqrt{h^2 + OL^2}} = \frac{ha\sqrt{4b^2 - a^2}}{4b\sqrt{h^2 + \frac{a^2\left(4b^2 - a^2\right)}{16b^2}}} = \frac{ha\sqrt{4b^2 - a^2}}{\sqrt{16b^2h^2 + a^2\left(4b^2 - a^2\right)}}.$$

$$d = \frac{4abh\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a+2b)\sqrt{16b^2h^2 + a^2\left(4b^2 - a^2\right)}} = 4.$$

Ответ: 4.