Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», осень 2020 г.

10 класс

Вариант 1

№1. Найти наименьшее значение многочлена $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

№2. Расстояние от дома Пети в городе A до домика бабушки в посёлке B равно 50 км. Петя на велосипеде поехал навестить бабушку. Дома отец обнаружил, что Петя забыл приготовленные для бабушки лекарства и через час после выезда Пети отправился догонять его на автомобиле со скоростью 75 км/ч. Догнав Петю и передав лекарства, отец сразу же повернул обратно. Так получилось, что отец вернулся домой в тот же момент времени, когда Петя доехал до бабушки. На каком расстоянии от домика бабушки отец догнал Петю? Ответ дайте в километрах. При решении задачи считайте, что и автомобиль и Петя на велосипеде всё время движутся с постоянными скоростями.

№3. Одна из сторон треугольника равна 34, а косинусы углов, прилежащих к этой стороне, равны $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите периметр треугольника.

№4. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся на 13.

№5. Имеется три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением содержания меди и никеля 4:1. Найдите массу третьего куска, если масса первого из них в два раза больше массы второго.

№6. Нечётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для каждого неположительного значения аргумента x значение этой функции на 9 меньше, чем значение функции $g(x) = (x^2 + 2x - 3)^2$. Найдите число корней уравнения $f(x) = 0$.

№7. Окружности радиусов r_1, r_2, r_3, r_4 $(r_1 < r_2 < r_3 < r_4)$ вписаны в угол. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите $\frac{L_2+L_3}{\pi}$, где $L_2 + L_3$ - сумма длин второй и третьей окружностей, если длина радиуса первой окружности равна $r_1 = 1$, а площадь круга ограниченного четвертой окружностью с радиусом r_4, равна 64π.

№8. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2-4x+a(a-2)}{\sqrt{x+a}-2} = 0$ имеет два различных корня. В ответе укажите количество целочисленных значений a, удовлетворяющих условию задачи.

№9. Ваня, долго умножая, вычислил 2020! В числе, полученном Ваней, Ксюша слева направо расставила знаки действий: между первой и второй цифрами знак «-», между второй и третьей цифрами знак «+», между третьей и четвертой – «-», и так далее, до конца. Затем Ваня вычислил результат этих действий. В полученном Ваней числе Ксюша опять расставила между цифрами знаки «-» и «+» по такому же правилу. После этого Ваня опять вычислил результат, и так далее. После некоторого количества таких операций было получено однозначное число. Какое?
($n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$)

Решение варианта 1

№1. Найти наименьшее значение многочлена $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

Решение.
Перемножая крайние и средние скобки, получим $f(x) = (x^2+3x)(x^2+3x+2)$, далее, вводя обозначение $y = x^2+3x+1$, получим $f(x) = (y-1)(y+1) = y^2 - 1 \geq -1$, причем наименьшее значение -1 будет достигаться при $y = 0$, т.е. при $x = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.
Ответ: -1.

№2. Расстояние от дома Пети в городе A до домика бабушки в посёлке B равно 50 км. Петя на велосипеде поехал навестить бабушку. Дома отец обнаружил, что Петя забыл приготовленные для бабушки лекарства и через час после выезда Пети отправился догонять его на автомобиле со скоростью 75 км/ч. Догнав Петю и передав лекарства, отец сразу же повернул обратно. Так получилось, что отец вернулся домой в тот же момент времени, когда Петя доехал до бабушки. На каком расстоянии от домика бабушки отец догнал Петю? Ответ дайте в километрах. При решении задачи считайте, что и автомобиль и Петя на велосипеде всё время движутся с постоянными скоростями.

Решение.
Обозначим t – время, которое был в пути Петя до встречи с отцом. Составим систему уравнений по условию задачи.

$\begin{cases} v\cdot t = 75(t-1) \\ v(t-1) = 50 - v\cdot t \end{cases}$; $\begin{cases} 2v\cdot t = 150(t-1) \\ 2v\cdot t = 50 + v \end{cases}$; $150t - 150 = 50 + v$; $v = 150t - 200$;

$t(150t-200) = 75(t-1)$; $6t^2 - 11t + 3 = 0$; $t_{1,2} = \frac{11\pm 7}{12} = \left[\begin{array}{l} 1,5 \\ \frac{1}{3} < 1 - \end{array}\right.$ не удовлетворяет условию задачи. $v = 150\cdot 1,5 - 200 = 25 км/ч;\ 50 - 25\cdot 1,5 = 12,5 км.$

Ответ: 12,5.

№3. Одна из сторон треугольника равна 34, а косинусы углов, прилежащих к этой стороне, равны $\frac{15}{17}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите периметр треугольника.

Решение:

1) Для решения задачи проведём дополнительное построение: $BD \perp AC$
2) $tg(\angle A) = \frac{BD}{AD} = \frac{\sin(\angle A)}{\cos(\angle A)}$; $\sin(\angle A) = \sqrt{1-\cos^2(\angle A)}$; $\sin(\angle A) = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17}$;
$tg(\angle A) = \frac{8}{17} : \frac{15}{17} = \frac{8}{15}$
3) $tg(\angle C) = \frac{BD}{DC} = \frac{\sin(\angle C)}{\cos(\angle C)}$; $\sin(\angle C) = \sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{15}{17}$; $tg(\angle C) = \frac{15}{17} : \frac{8}{17} = \frac{15}{8}$

4) $BD = AD \cdot tg\left(\angle A\right)$ и $BD = DC \cdot tg\left(\angle C\right)$. Значит $AD \cdot \frac{8}{15} = DC \cdot \frac{15}{8}$.

Так как $DC = AC - AD$, т.е. $DC = 34 - AD$, то $AD \cdot \frac{8}{15} = \left(34 - AD\right) \cdot \frac{15}{8}$. Значит $64AD = \left(34 - AD\right) \cdot 15^2$; $\left(64 + 225\right)AD = 34 \cdot 15^2$; $AD = \frac{34 \cdot 15^2}{289} = \frac{2 \cdot 15^2}{17}$.

5) $AB = \frac{AD}{\cos\left(\angle A\right)}$, то есть $AB = \frac{2 \cdot 15^2}{17} : \frac{15}{17} = 2 \cdot 15 = 30$.

6) $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\left(\angle A\right)}$; .

7) $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 30 + 16 + 34 = 80$

Ответ: 80.

№4. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся на 13.
Решение:
Рассмотрим две последовательности, которые являются арифметическими прогрессиями. Первая – это последовательность трёхзначных натуральных чисел, вторая -последовательность натуральных трёхзначных чисел кратных тринадцати. Разность сумм этих прогрессий и есть искомая величина. Всего трёхзначных чисел 999-100+1=900. В первой прогрессии $a_1 = 100$, $a_{900} = 999$, $d = 1$. $S = \frac{a_1 + a_{900}}{2} \cdot n = \frac{100 + 999}{2} \cdot 900 = 494550$. Во второй прогрессии первый элемент, кратный 13 это 104. $b_1 = 104$, $b_n = b_1 + (n-1) \cdot d$, $b_n < 1000$, $b_1 + \left(n-1\right) \cdot 13 < 1000$, $104 + 13n - 13 < 1000$, $13n < 909$, так как $n \in Z$, $n = 69$, $S = \frac{2 \cdot 104 + (69-1)13}{2} 69 = 37674$. Вычитая из первой суммы вторую, получим, что трёхзначных чисел не кратных 13 456876
Ответ: 456876.

№5. Имеется три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением содержания меди и никеля 4:1. Найдите массу третьего куска, если масса первого из них в два раза больше массы второго.
Решение:
Пусть масса второго куска x кг, тогда масса первого куска 2x кг, а масса третьего куска y кг.

	Медь	Никель
1 кусок	$\frac{2}{3} \cdot 2x$	$\frac{1}{3} 2x$
2 кусок	$\frac{3}{4} x$	$\frac{1}{4} x$
3 кусок	$\frac{5}{6} y$	$\frac{1}{6} y$

Масса нового сплава $2x + x + y = 12$, масса меди и никеля в нём $\frac{4}{5} \cdot 12 = \frac{48}{5}$ и $\frac{1}{5} \cdot 12 = \frac{12}{5}$ соответственно.

Выпишем систему уравнений $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ \frac{2}{3} \cdot 2x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y = 9,6 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 2,4 \end{cases}$;

$\begin{cases} 16x + 9x + 10y = 115,2 \\ y = 12 - 3x \end{cases}$; $\begin{cases} 25x + 10y = 115,2 \\ y = 12 - 3x \end{cases}$; $25x + 120 - 30x = 115,2$;

$-5x = -4,8$; $x = 0,96$ масса второго куска, 1,92 – масса первого куска, $y = 12 - 3x = 9,12$ - масса третьего куска.

Ответ: 9,12 кг.

№6. Нечётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для каждого неположительного значения аргумента x значение этой функции на 9 меньше, чем значение функции $g(x) = (x^2 + 2x - 3)^2$. Найдите число корней уравнения $f(x) = 0$.

Решение: при $x \le 0$ $f(x) = (x^2 + 2x - 3)^2 - 9$. Решим уравнение

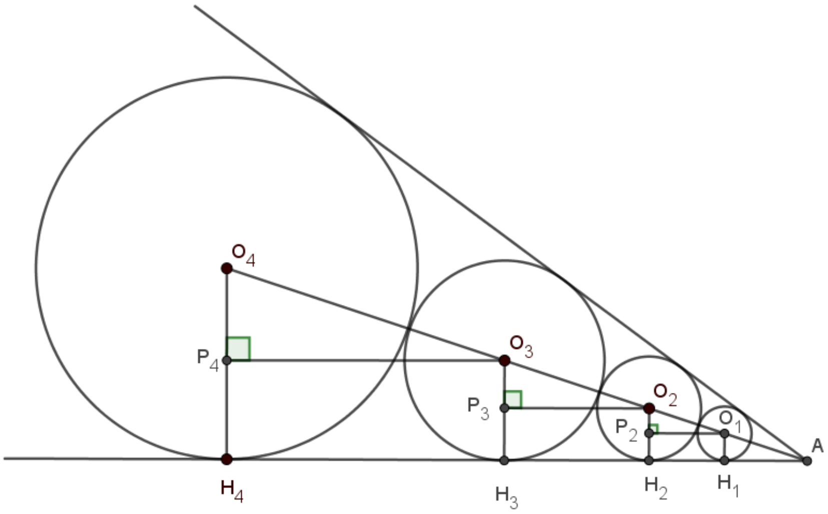
$(x^2 + 2x - 3)^2 - 3^2 = 0$; $(x^2 + 2x - 6)(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 6 = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{array} \right.$;

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}; x_3 = 0; x_4 = -2.$ $-1 + \sqrt{7}$ >0 – не подходит. В силу нечётности функции для каждого отрицательного корня противоположное ему положительное число – тоже корень. Поэтому корнями уравнения являются числа: 0; $-1 - \sqrt{7}; 1 + \sqrt{7}; \pm 2$. Всего 5 корней.

Ответ: 5.

№7. Окружности радиусов r_1, r_2, r_3, r_4 $(r_1 < r_2 < r_3 < r_4)$ вписаны в угол. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите $\frac{L_2 + L_3}{\pi}$, где $L_2 + L_3$ - сумма длин второй и третьей окружностей, если длина радиуса первой окружности равна $r_1 = 1$, а площадь круга ограниченного четвертой окружностью с радиусом r_4, равна 64π.

Решение.



Обозначим центры окружностей O_1, O_2, O_3, O_4, вершину угла обозначим A, точки касания окружностей с одной из сторон угла обозначим H_1, H_2, H_3, H_4. Построим отрезки O_1P_2, O_2P_3, O_3P_4, параллельные стороне угла, на которой лежат точки H_1, H_2, H_3, H_4, так, что $P_2 \in O_2H_2$, $P_3 \in O_3H_3$, $P_4 \in O_4H_4$. Тогда
$|O_1O_2| = r_1 + r_2$, $|O_2O_3| = r_2 + r_3$, $|O_3O_4| = r_3 + r_4$,
$|O_2P_2| = r_2 - r_1$, $|O_3P_3| = r_3 - r_2$, $|O_4P_4| = r_4 - r_3$.
Треугольники $O_1P_2O_2$ и $O_2P_3O_3$, $O_2P_3O_3$ и $O_3P_4O_4$ подобны. Из первого подобия получаем $\frac{|O_2P_2|}{|O_3P_3|} = \frac{|O_1O_2|}{|O_2O_3|}$, $\frac{r_2-r_1}{r_3-r_2} = \frac{r_2+r_1}{r_3+r_2}$, $r_2^2 = r_1r_3$. Таким образом, числа r_1, r_2, r_3 образуют геометрическую прогрессию. Аналогично из второго подобия получаем $r_3^2 = r_2r_4$. Числа r_2, r_3, r_4 также образуют геометрическую прогрессию. Следовательно, **все четыре числа $\boldsymbol{r_1, r_2, r_3, r_4}$ образуют геометрическую прогрессию.**
В нашей задаче $r_1 = 1$, $\pi r_4^2 = 64\pi$ или $r_4 = 8$. Тогда $r_2 = 2$, $r_3 = 4$. Далее
$$\frac{L_2 + L_3}{\pi} = \frac{2\pi r_2 + 2\pi r_3}{\pi} = 2(r_2 + r_3) = 12.$$

Ответ: 12.

№8. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2-4x+a(a-2)}{\sqrt{x+a}-2} = 0$ имеет два различных корня. В ответе укажите количество целочисленных значений a, удовлетворяющих условию задачи.

Решение: Исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 4x + a^2 - 2a = 0 \\ x + a \ge 0, x \ge -a \\ x + a \ne 4, x \ne 4 - a \end{cases}$.
Переформулируем задачу. Надо найти такие значения параметра, при которых квадратное уравнение системы имеет два различных корня $\ge -a$ и не совпадающих с $(4-a)$.
Найдём, при каких значениях a один из корней уравнения (или оба) совпадают с числом $(4-a)$.
$(4-a)^2 - 4(4-a) + a^2 - 2a = 16 - 8a + a^2 - 16 + 4a + a^2 - 2a = 2a^2 - 6a = 0$;
$a_1 = 0; a_2 = 3.$

То, что уравнение имеет два различных корня $\ge a$ задаётся следующей системой условий

$\begin{cases} D > 0 \\ x_b > -a \\ f(-a) \geq 0 \end{cases}$;(1) $\quad \frac{D}{4} = 4 - a^2 + 2a > 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 4 < 0;$ $a \in (1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5})$; $\quad x_b = 2$;

$f(-a) = a^2 + 4a + a^2 - 2a = 2a^2 + 2a \geq 0; \quad a \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty);$ Система (1) равносильна системе $\begin{cases} a \in (1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}) \\ a \in (-2; +\infty) \\ a \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (1-\sqrt{5}; -1] \cup [0; 1+\sqrt{5})$.

Исключив из этого промежутка особое значение параметра – число 0, получим множество значений a, удовлетворяющих условию задачи:

$a \in (1-\sqrt{5}; -1] \cup (0; 1+\sqrt{5})$. Целочисленные значения параметра, входящие в ответ: -1, 1 и 2, всего 3 значения.

Ответ: 3.

№9. Ваня, долго умножая, вычислил 2020! В числе, полученном Ваней, Ксюша слева направо расставила знаки действий: между первой и второй цифрами знак «-», между второй и третьей цифрами знак «+», между третьей и четвертой – «-», и так далее, до конца. Затем Ваня вычислил результат этих действий. В полученном Ваней числе Ксюша опять расставила между цифрами знаки «-» и «+» по такому же правилу. После этого Ваня опять вычислил результат, и так далее. После некоторого количества таких операций было получено однозначное число. Какое?
(n!=1·2·3·…·n)

Решение.
Число 2020! кратно 11. Известно, что число кратно 11 тогда и только тогда, когда разность двух сумм цифр в его десятичной записи: стоящих на нечетных местах и стоящих на четных местах, кратна 11. Поэтому комбинация цифр, составленная Ксюшей, опять дает число кратное 11, и так далее. Таким образом, каждое из чисел, получаемых в результате описанных операций, кратно 11. Существует единственное однозначное число, кратное 11, это число 0.
Ответ: 0.