

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ СОРЕВНОВАНИЕ «ШАГ В БУДУЩЕЕ, МОСКВА»

**Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Прикладная математика» ФН-2**

«Золотое сечения» в музыке

Автор: Власов Виталий Владимирович
ОАНО «Учебный центр «Перспектива», 11-й класс
Научный руководитель: ***Котович Александр Валерианович***
к.н., доцент кафедры
«Прикладная математика» ФН-2,
МГТУ им. Н.Э. Баумана

Москва

2021

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	3
1. Понятие «Золотое сечение»	5
2. «Золотое сечение» в музыкальных произведениях	9
2.1 Анализ Первой части Симфонии № 40 (1788г.)	11
2.2 Анализ музыкального произведения «Танец Феи Драже» (1892г.)	12
2.2 Анализ марша «Прощание Славянки» (1912 г.)	13
2.4 Анализ главной мелодии из фильма «Ла-ла-ленд» (2016 г.)	14
2.5 Анализ песни «Кадиллак» (2020 г.)	15
Заключение	17
Литература	18

ВВЕДЕНИЕ

Существует стереотип, что все люди делятся на «рациональных», с условным техническим складом ума и «эмоциональных», с более творческим и гуманитарным складом ума. Но этот стереотип опровергается примерами, в которых творческое начало подтверждается четкими расчетами, и наоборот, в которых сухие математические формулы становятся основой искусства.

Одним из ярких подтверждений возможности сочетания иррационального и рационального является музыка.

С древних времен музыка присутствовала в жизни людей, сначала в ритуалах и обычаях, затем в политической и светской жизни. Но немногие задумывались о том, почему некоторые музыкальные созвучия приятны на слух, а другие звучат резко и раздражают, почему одна мелодия эмоционально успокаивает, а другая хорошо подходит для военного марша.

Считается, что первым, кто задумался над связью гармонии и математики был Пифагор. Для него и его последователей, пифагорейцев, математика была божественной наукой, открывающей законы красоты Вселенной, и музыка была также причастной божественному.

Считается, что помимо идеи связи гармонии и математики Пифагор ввел понятие «Золотого сечения». По сей день принципы «Золотого сечения» используются в математике, физике, биологии, астрономии и других науках, в архитектуре, живописи и других искусствах.

Цель работы – изучить золотое сечение в музыкальных произведениях на конкретных примерах и проанализировать, используется ли данное правило в современной музыке или оно свойственно только классическим произведениям прошлых веков.

Задачи:

1. Изучить понятие «Золотое сечение».
2. Изучить исследования по теме «Золотого сечения» в музыке.

3. Проанализировать различные по жанру и времени создания музыкальные произведения на предмет наличия в них «Золотого сечения».

1. Понятие «золотое сечение»

Термин «Золотое сечение» знаком многим. Это идеальное соотношение величин, лежащее в основе гармонии природы и человека, высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей.

Очевидно, что при делении целого на две неравные части возможно бесконечное множество отношений между целым и одной из его частей, а также между самими частями целого. Но только в единственном случае эти отношения могут быть равными. Этот случай и представляет собой золотое сечение – случай, когда целое относится к большей части, как большая часть к меньшей.

В древнегреческой математике изначально золотым сечением именовалось деление отрезка АВ точкой С на две части так, что большая часть относится к меньшей, как весь отрезок к большей (Рис.1):

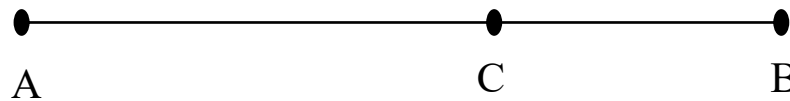


Рис.1 – деление отрезка золотым сечением

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

Обозначим отрезок AC буквой x , и отрезок CB буквой a , тогда отрезок АВ будет равен сумме $x+a$ получим:

$$\frac{x}{a} = \frac{x+a}{x} \Rightarrow x^2 + ax + a^2 = 0 \quad (2)$$

Решая данное квадратное уравнение, получим:

$$x_{1,2} = a \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

Поскольку x часть целого, то есть величина положительная, а второй корень отрицателен, то приходим к единственному значению корня:

$$x = a \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618a \quad (4)$$

Коэффициент $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ называется «Золотым числом», и обозначается греческой буквой Φ (ϕ) в честь древнегреческого скульптора и архитектора **Фидия**, мастера, воплотившего это число в своих работах. Для практических целей используют приближённое значение $\Phi = 1,618\dots$

Величины, отношение которых равно Φ , находятся в «Золотой пропорции», а само соотношение называется «Золотым сечением».

Наиболее наглядным графической интерпретацией «Золотого сечения» является «Золотой прямоугольник» (Рис.2) — это прямоугольник, длины сторон которого находятся в «Золотой пропорции». Особенность этого прямоугольника в том, что, сколько бы вы ни отрезали от него квадратов, стороны оставшегося прямоугольника всегда будут сохранять соотношение 1 к 1,168.

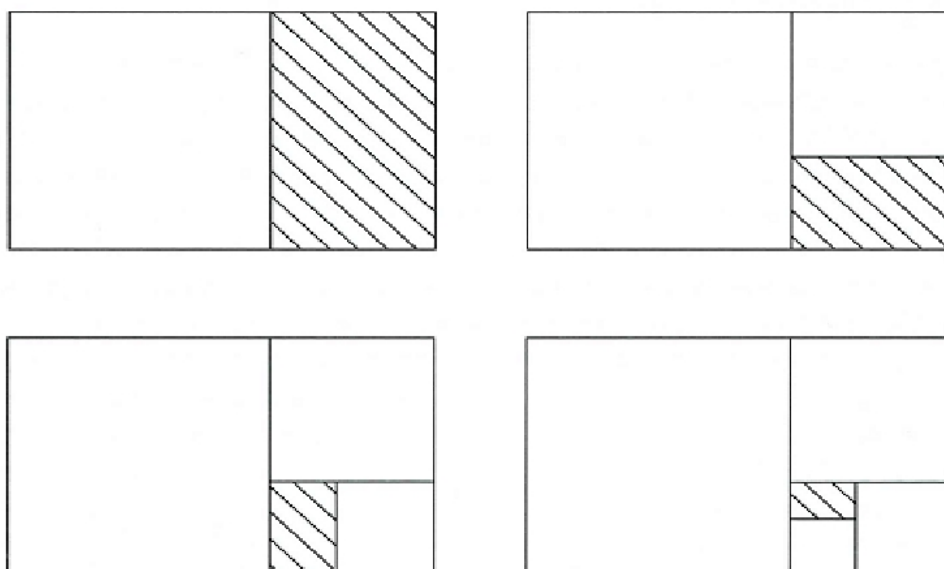


Рис. 2 – «Золотой» прямоугольник

Если записать число Φ с помощью себя же, то получится $\Phi = \frac{\Phi+1}{\Phi}$ или $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. Каждый раз, заменяя Φ в знаменателе, получим бесконечную цепная дробь:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (5)$$

Используя непрерывную дробь можно раскрыть связь «Золотого сечения» с последовательностью Фибоначчи (ряд чисел, в котором каждое последующее число является суммой двух предыдущих чисел).

Для этого необходимо немного изменить бесконечную дробь добавив индексы, чтобы показать, как следующее значение $\Phi (n+1)$ может быть получено из предыдущего значения $\Phi (n)$.

$$\Phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\Phi_n} \quad (6)$$

Так как это бесконечная цепная дробь, с ростом n искомое значение приближается к истинному значению Φ .

Теперь допустим, что $\Phi(0) = 1$ и найдем $\Phi(1)$.

$$\Phi_1 = 1 + \frac{1}{\Phi_0} = 1 + \frac{1}{1} = 2/1 \quad (7)$$

Далее вычислим $\Phi(2)$.

$$\Phi_2 = 1 + \frac{1}{\Phi_1} = 1 + \frac{1}{2/1} = 3/2 \quad (8)$$

Таким же способом можно вычислить $\Phi(3)$, $\Phi(4)$:

$$\Phi_3 = 1 + \frac{1}{\Phi_2} = 1 + \frac{1}{3/2} = 5/3 \quad (9)$$

$$\Phi_4 = 1 + \frac{1}{\Phi_3} = 1 + \frac{1}{5/3} = 8/5 \quad (10)$$

Как можно заметить, каждое следующее значение — это отношение двух соседних чисел Фибоначчи.

По мере продвижения к каждому новому последовательному вычислению обнаруживается, что значение отношения все ближе и ближе приближается к его истинному «Золотому сечению».

На девятом члене последовательности Фибоначчи получается значения «Золотого сечения», с тремя верными цифрами после запятой.

Таблица 1 – значения отношений чисел
в последовательности Фибоначчи

№ п/п	Отношение	Значение	№ п/п	Отношение	Значение
1	1/1	1	6	13/8	1,625
2	2/1	2	7	21/13	1,615
3	3/2	1,5	8	34/21	1,619
4	5/3	1,667	9	55/34	1,618
5	8/5	1,6	10	89/55	1,618

Если визуализировать этот процесс, то видно, что последовательность Фибоначчи создает прямоугольники всё ближе и ближе к «Золотому прямоугольнику».

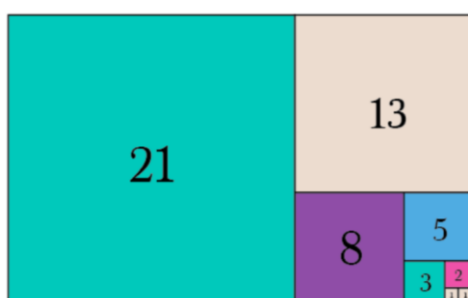


Рис. 3 – Прямоугольник Фибоначчи

На это число обратили внимание художники, скульпторы, архитекторы — его назвали божественной пропорцией и стали использовать в произведениях искусства, чтобы добиться идеальной композиции, наилучшего сочетания всех элементов произведения. Но выявить и наделить

такими пропорциями материальные объекты представляется не таким сложным. Данная работа посвящена поиску «божественной пропорции» в музыке.

2. «Золотое сечение» в музыкальных произведениях

На практике оказывается, что метод золотого сечения применяется и в музыке. Оказывается, в музыкальных произведениях очень часто встречается эта «Золотая пропорция».

В начале 20 века на заседании Московского музыкального кружка было сделано сообщение, содержащее информацию о том, какое применение находит золотое сечение в музыке. Сообщение с огромным интересом слушали члены музыкального кружка композиторы С. Рахманинов, С. Танеев, Р. Глиэр и другие. Доклад музыковеда Розенова Э.К. «Закон золотого сечения в музыке и поэзии» положил начало исследованиям математических закономерностей, связанных с «Золотой пропорцией», в музыке. Он проанализировал музыкальные произведения Моцарта, Баха, Бетховена, Вагнера, Шопена, Глинки и других композиторов и показал, что в их произведениях присутствует эта «Божественная пропорция».

Кульминация многих музыкальных произведений располагается не в центре, а немного смещена к концу произведения в соотношении 62:38 – это и есть точка золотой пропорции. Доктор искусствоведения, профессор Л. Мазель заметил, изучая восьмитактные мелодии Шопена, Бетховена, Скрябина, что во многих творениях этих композиторов кульминация, как правило, приходится на слабую долю пятого, то есть на точку золотого сечения – $5/8$. Л. Мазель считал, что практически у каждого композитора – приверженца гармонического стиля можно найти подобную музыкальную структуру: пять тактов подъёма и три такта спуска. Это говорит о том, что метод золотого сечения активно применялся композиторами сознательно, либо бессознательно. Вероятно, такое структурное расположение

кульминационных моментов придает музыкальному произведению гармоническое звучание и эмоциональную окраску.

Серьёзное исследование музыкальных произведений на предмет проявления в них золотой пропорции предпринял композитор и музыковед Л. Сабанеев. Он изучил около двух тысяч творений разных композиторов и пришёл к выводу, что примерно в 75% случаев золотое сечение присутствовало в музыкальном произведении хотя бы один раз. Самое большое количество произведений, в которых встречается золотая пропорция, он отмечал у таких композиторов, как Аренский (95%), Бетховен (97%), Гайдн (97%), Моцарт (91%), Скрябин (90%), Шопен (92%), Шуберт (91%).

Изучив множество произведений классической музыки, можно сделать вывод о том, что музыкальные произведения по своей форме тяготеют к симметрии. В основном классическое произведение образует трехчастную форму. В первой части звучат одна или две темы, которые хорошо запоминаются благодаря неоднократному повторению. В средней части первоначальная тема подвергается развитию, видоизменению, либо вообще не появляется. Третья часть является полным или частичным повторением первой. И это закономерно, так как, если бы произведение состояло из постоянно сменяющих друг друга мотивов, сознанию было бы не за что зацепиться.

После исследования произведений с помощью математических расчетов было выявлено, что точка золотого сечения во многих из них приходит на начало третьей части.

Но если изучением классических гармонических мелодий занимались некоторые ученые, то по исследованиям, в области наличия золотого сечения в более современной музыке и музыке других жанров, публикации практически отсутствуют.

Одной из задач данной работы является проследить «наличие божественной пропорции» в нескольких разножанровых музыкальных произведениях, сочиненных в разные века.

Для анализа предлагается взять следующие произведения:

- 1) Первая часть Симфонии № 40 (I. Molto Allegro), автор – Вольфганг Амадей Моцарт, год создания – 1788.
- 2) «Танец Феи Драже» из балета «Щелкунчик», автор – П.И. Чайковский, год создания – 1892.
- 3) Марш «Прощание Славянки», автор – Василий Агапкин, год создания – 1912, в исполнении Образцового военного оркестра Почетного караула Московского гарнизона.
- 4) Главная мелодия из художественного фильма «Ла-ла-ленд» под названием «Mia & Sebastian's Theme», автор – Джастин Гурвиц, год создания – 2016, получившая премию «Оскар» как лучшая музыка к фильму в 2017 году.
- 5) Современную песню «Кадиллак», автор – Слава Марлоу, исполнители Моргенштерн и Элджей, год создания – 2020. Для анализа данная песня была прослушана без слов, с целью того, чтобы речевая дорожка не влияла на восприятие мелодии.

2.1 Анализ Первой части Симфонии № 40 (1788г.)

Данное музыкальное произведение является классическим. В анализируемой мелодии явно можно выделить четыре музыкальных отрезка.

В таблице 2 указаны отрывки в минутах по хронометражу мелодии, а также представлен перевод в секундах для удобства расчета отношения.

Табл.2 – расчет «Золотого сечения»

Первой части Симфонии № 40

Музыкальные отрезки, мин.	Музыкальные отрезки, сек.	Отношение	Значение	Погрешность
0 – 1:47	0 – 107	–	–	–
1:47 – 2:57	107 – 177	177/107	1,654	-0,036
2:57 – 4:34	177 – 274	274/177	1,548	0,070
4:34 – 7:24	274 – 444	444/274	1,620	-0,002

На временной шкале ниже (Рис.4) представлено графическое деление произведения на отрезки.

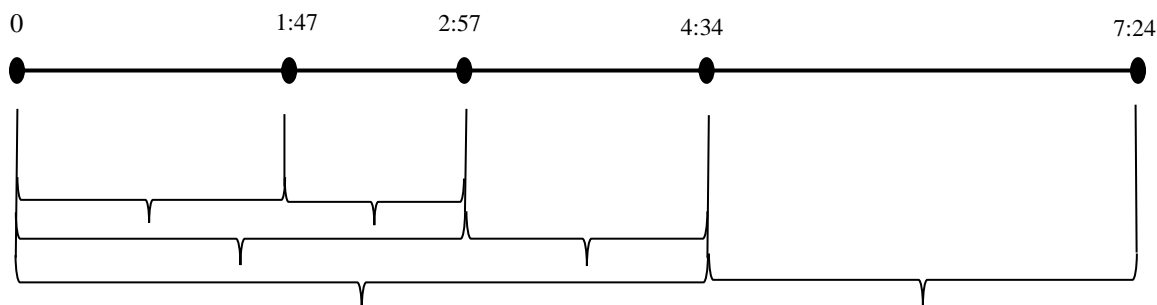


Рис. 4 – временная шкала первой части Симфонии № 40

Проанализировав данное произведение можно сказать о том, что значения отношений находятся достаточно близко к «Золотому сечению», погрешности значений указаны в Таблице 2, и максимальное значение по модулю составляет 0,07.

Таким образом, можно говорить о том, что структура произведения выстраивается по «Золотому сечению» с погрешностью 0,07.

2.2. Анализ музыкального произведения «Танец Феи Драже» (1892г.)

Данное музыкальное произведение является классическим вальсом. В анализируемой мелодии явно можно выделить три музыкальных отрезка.

В таблице 3 указаны отрывки в минутах по хронометражу мелодии, а также представлен перевод в секундах для удобства подсчета отношения.

Табл.3 – расчет «Золотого сечения» произведения «Танец Феи Драже»

Музыкальные отрезки, мин.	Музыкальные отрезки, сек.	Отношение	Значение	Погрешность
0 – 0:48	0 – 48	–	–	–
0:48 – 1:15	48 – 75	$75/48$	1,563	0,055
1:15 – 2:07	75 – 127	$127/75$	1,693	-0,075

На временной шкале ниже (Рис.5) представлено графическое деление произведения на отрезки.

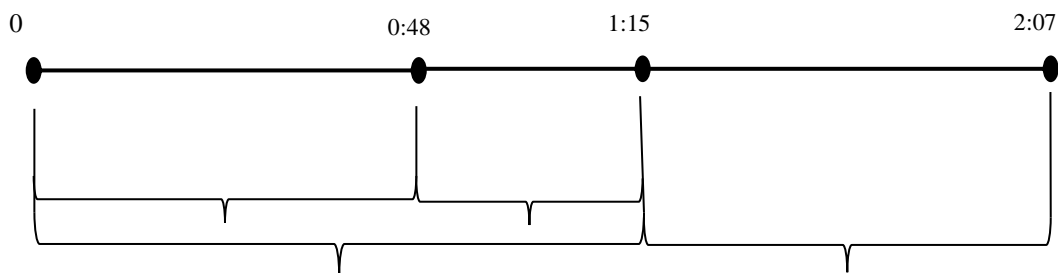


Рис. 5 – временная шкала первой вальса «Танец Феи Драже»

Проанализировав данное произведение можно сказать о том, что значения отношений находятся достаточно близко к «Золотому сечению», погрешности значений указаны в Таблице 3, и максимальное значение по модулю составляет 0,075.

Таким образом, можно говорить о том, что структура произведения выстраивается по «Золотому сечению» с погрешностью 0,075.

2.3 Анализ марша «Прощание Славянки» (1912 г.)

Данное музыкальное произведение является маршем. В анализируемой мелодии явно можно выделить четыре музыкальный отрезка.

В таблице 4 указаны отрывки в минутах по хронометражу мелодии, а также представлен перевод в секундах для удобства подсчета отношения.

Табл.4 – расчет «Золотого сечения»
марша «Прощание Славянки»

Музыкальные отрезки, мин.	Музыкальные отрезки, сек.	Отношение	Значение	Погрешность
0 – 0:53	0 – 53	–	–	–
0:53 – 1:25	53 – 85	$85/53$	1,604	0,014
1:25 – 1:57	85 – 117	$117/85$	1,376	0,242
1:57 – 3:10	117 – 190	$190/117$	1,624	-0,006

На временной шкале ниже (Рис.6) представлено графическое деление произведения на отрезки.

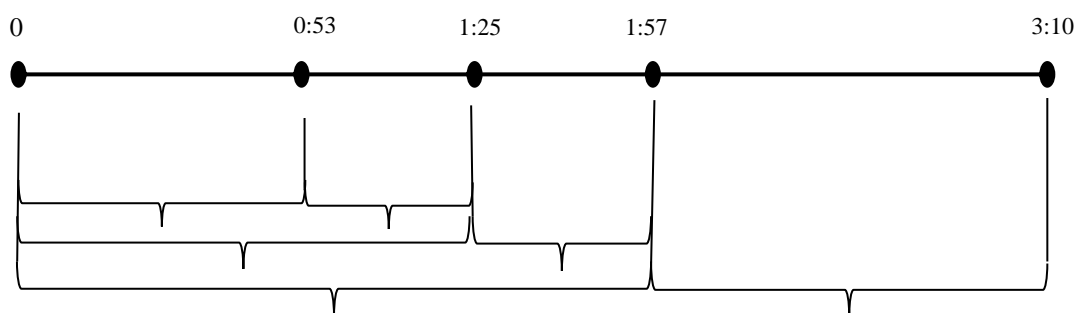


Рис. 6 – временная шкала марша «Прощание Славянки»

Проанализировав данное произведение можно сказать о том, что значения отношений также находятся умеренно близко к «Золотому сечению», но недостаточно для того, чтобы можно было сделать вывод о том, что оно присутствует в произведении. Погрешности значений указаны в Таблице 4, и максимальное значение по модулю составляет 0,242.

Скорее всего, данный факт обусловлен жанром произведения.

2.4 Анализ главной мелодии из фильма «Ла-ла-ленд» (2016 г.)

Данная музыка является современным классическим музыкальным произведением. В анализируемой мелодии явно можно выделить четыре музыкальный отрезка.

В таблице 5 указаны отрывки в минутах по хронометражу мелодии, а также представлен перевод в секундах для удобства подсчета отношения.

Табл.5 – расчет «Золотого сечения»
главной мелодии из фильма «Ла-ла-ленд»

Музыкальные отрезки, мин.	Музыкальные отрезки, сек.	Отношение	Значение	Погрешность
0 – 0:36	0 – 36	–	–	–
0:36 – 1:00	36 – 60	60/36	1,617	0,001
1:00 – 1:37	60 – 97	97/60	1,667	-0,049

На временной шкале ниже (Рис.7) представлено графическое деление произведения на отрезки.

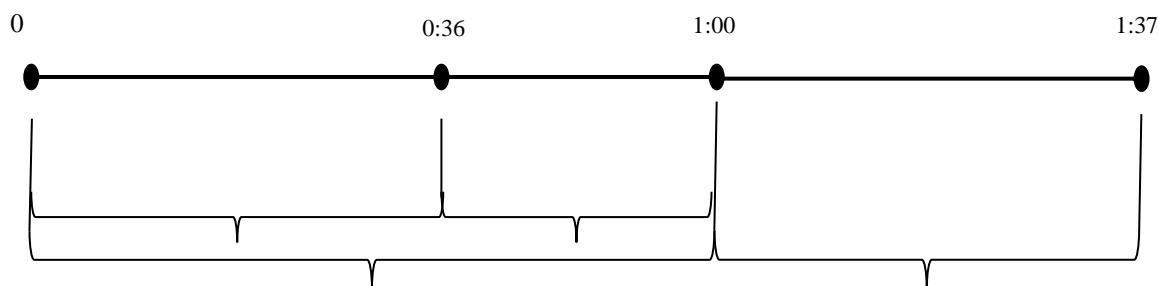


Рис. 7 – временная шкала главной мелодии из фильма «Ла-ла-ленд»

Проанализировав данное произведение можно сказать о том, что значения отношений находятся наиболее близко к «Золотому сечению», погрешности значений указаны в Таблице 5, и максимальное значение по модулю составляет 0,049.

Таким образом, можно говорить о том, что структура произведения выстраивается по «Золотому сечению» с погрешностью 0,049.

Тот факт, что музыка получила премию «Оскар» лишь подтверждает гармоничность ее восприятия человеком.

2.5 Анализ песни «Кадиллак» (2020 г.)

Данная музыка является современным электронным музыкальным произведением. Песня анализировалась без речевой дорожки. В ней явно можно выделить три музыкальных отрезка. При этом, также было учтено, что в песне есть вступление продолжительностью 21 секунда.

В таблице 6 указаны отрывки в минутах по хронометражу мелодии, в скобках указан суммарный хронометраж с вступлением, а также представлен перевод в секундах для удобства подсчета отношения.

Табл.6 – расчет «Золотого сечения»
песни «Кадиллак»

Музыкальные отрезки, мин.	Музыкальные отрезки, сек.	Отношение	Значение	Погрешность
0 (21) – 1:04 (1:25)	0 – 64	–	–	–
1:04 (1:25) – 1:42 (2:03)	64 – 102	102/64	1,594	0,069
1:42 (2:03) – 2:37 (2:58)	102 – 157	157/102	1,539	0,079

На временной шкале ниже (Рис.8) представлено графическое деление произведения на отрезки.

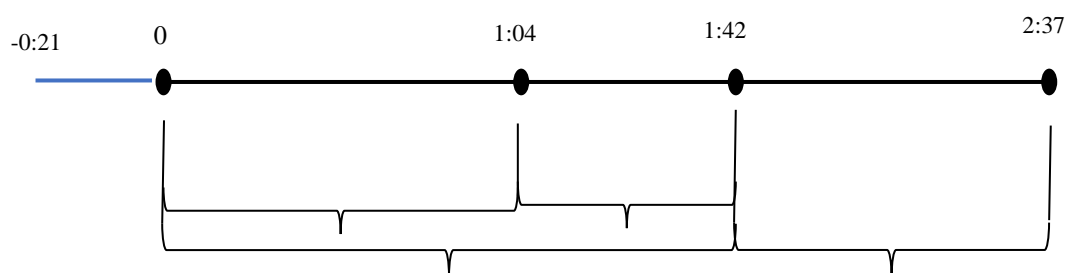


Рис. 8 – временная шкала мелодии песни «Кадиллак»

Проанализировав данное произведение можно сказать о том, что значения отношений находятся также достаточно близко к «Золотому сечению», погрешности значений указаны в Таблице 6, и максимальное значение по модулю составляет 0,069.

Таким образом, можно говорить о том, что структура произведения выстраивается по «Золотому сечению» с погрешностью 0,069.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, простой математический анализ, не выходящий за рамки арифметики, позволяет совершенно иными глазами взглянуть на музыкальное произведение, увидеть его скрытую внутреннюю красоту, которую мы только ощущаем, математически объяснить гармоничность мелодии для восприятия человеком.

В результате исследования была достигнута цель и выявлено, что наличие золотого сечения в музыке характерно не только для классических произведений прошлых веков, но и для мелодий другого времени и жанра.

В результате работы были решены следующие задачи:

1. Было изучено понятие «Золотое сечение».
2. Были исследованы публикации по теме наличия «золотого сечения» в музыке.
3. Были проанализированы конкретные музыкальные произведения разных жанров и эпох.

На основе результатов работы можно сказать о том, что правило «золотого сечения» распространяется не только на классические произведения. Безусловно, на примере анализа столь малого количества мелодий нельзя утверждать о наличии закономерности. Тем не менее, результаты работы подтверждают, что данная тема имеет потенциал для исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фернандо Корбалан, «Золотое сечение. Математический язык красоты», перевод с английского, Москва - 2013г., издательство «Де Агостини», 160 с.
2. Г.Э.Тимердинг, «Золотое сечение», Москва -2020г., издательство «Ленанд», 120 с.
3. Л.Мазель, «Строение музыкальных произведений», Учеб. пособие.— 2-е изд. доп. и перераб. — М.: Музыка, 1979. — 536 с.
4. [http://www.wikiznanie.ru/ru-wz/index.php/Золотое_сечение_\(в_музыке\)](http://www.wikiznanie.ru/ru-wz/index.php/Золотое_сечение_(в_музыке))
5. <https://www.classicalmusicnews.ru/articles/muzyika-i-matematika-first/>
6. <http://iteach.vspu.ru/06-2018/16148/>
7. <https://fb.ru/article/45203/metod-zolotogo-secheniya-v-muzyikalnyih-proizvedeniyah>
8. <https://medium.com/paradox-review/что-такое-золотое-сечение-e5a35a43768a>