Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2020 г.

9 класс

Вариант № 5

1. *(10 баллов)* Решить неравенство: $\frac{|3x^2+8x-3|+|3x^4+2x^3-10x^2+30x-9|}{|x-2|-2x-1} \leq 0.$

2. *(15 баллов)* Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите площадь трапеции, если её высота равна 12 см, а длины биссектрис – 15 см и 13 см.

3. *(15 баллов)* Два повара для приготовления вишнёвого варенья смешали вишню и сахар, первый положил на две части вишни одну часть сахара, второй - на три части вишни две части сахара. Сколько килограммов каждой смеси нужно взять, чтобы получить 1,9 килограммов смеси, в которой на двенадцать частей вишни приходится семь частей сахара?

4. *(20 баллов)* Определите количество решений уравнения

$$a(x+|x|-2)=x^2+4x-5$$

в зависимости от значений параметра a.

5. *(20 баллов)* Окружность проходит через вершины A и C равнобедренного треугольника $ABC(AB=BC)$ и пересекает стороны AB и BC в точках M и N, соответственно. MK, хорда этой окружности, равная по длине $2\sqrt{5}$, содержит точку H, лежащую на AC и являющуюся основанием высоты треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку C и перпендикулярная BC, пересекает прямую MN в точке L. Найти радиус окружности, описанной около треугольника MKL, если $\cos\angle ABK=\frac{2}{3}$.

6. *(20 баллов)* Существует ли натуральное число, квадрат которого равен сумме пяти попарно различных квадратов целых чисел, таких, что среди них есть число 7^2?

Решение варианта № 5

1. *(10 баллов)* Решить неравенство: $\frac{|3x^2+8x-3|+|3x^4+2x^3-10x^2+30x-9|}{|x-2|-2x-1} \le 0.$

Решение. ОДЗ: $|x-2|-2x-1 \ne 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ x\ne\frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 2 \\ x\ne -3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};+\infty\right).$

Числитель дроби больше или равен 0. Поэтому, с учетом ОДЗ, получим совокупность: $\left[\begin{array}{l} |x-2|-2x-1<0 \\ |3x^2+8x-3|+|3x^4+2x^3-10x^2+30x-9|=0 \end{array}\right.$

1. Решаем первое неравенство:
   $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2\ge 0 \\ x-2-2x-1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0 \\ -x+2-2x-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ \frac{1}{3}<x<2 \end{array}\right. \Rightarrow x > \frac{1}{3}.$
2. Решим теперь уравнение из рассматриваемой совокупности. Оно имеет решение тогда и только тогда, когда каждый модуль равен 0:
   $\begin{cases} 3x^2+8x-3=0 \\ 3x^4+2x^3-10x^2+30x-9=0 \end{cases}.$
   Решим первое уравнение:

$x = \frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{6} \Rightarrow \quad x_1=-3, \ x_2=\frac{1}{3}.$

Подставляя x_1 и x_2 во второе уравнение системы видим, что они являются корнями:

$3(-3)^4+2(-3)^3-90-90-9=189-189=0,$

$3\left(\frac{1}{3}\right)^4+2\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{10}{9}+1=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}=0.$

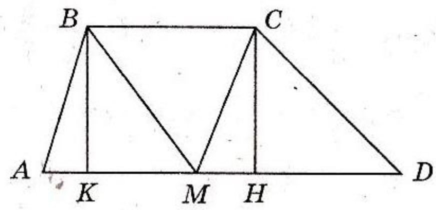
Но $x_2=\frac{1}{3}$ не ответ по ОДЗ, а $x_1=-3$ является решением системы, а, значит, и решением исходного неравенства.

Ответ: $\{-3\} \cup \left(\frac{1}{3};+\infty\right).$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	10
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	8
С помощью верных рассуждений получены нули числителя дроби, но отсутствует обоснованное завершение решения исходного неравенства.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	10

2. *(15 баллов)* Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите площадь трапеции, если её высота равна 12 см, а длины биссектрис – 15 см и 13 см.

Решение. Пусть отрезок BK - высота данной трапеции $ABCD$ (ВК=СН=12), ВМ и СМ – биссектрисы углов соответственно ABC и BCD, причём ВМ=15, СМ=13. В прямоугольных треугольниках *ВКМ* и *СНМ* по теореме Пифагора находим соответственно:



$$KM = \sqrt{BM^2 - BK^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9;$$

$$MH = \sqrt{CM^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Обозначим: $HD = x, AK = y$.

Так как $\angle ABM = \angle CBM$ (*BM* – биссектриса угла *ABC*) и $\angle CBM = \angle AMB$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей *BM*), то $\angle ABM = \angle AMB$, значит $\triangle ABM$ - равнобедренный. При этом $AB = AM = KM + AK = 9 + y$. В прямоугольном $\triangle ABK$ имеем: $AB^2 = AK^2 + BK^2$ или $(9+y)^2 = y^2 + 144 \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow y = 3{,}5$.

Тогда $AB = AM = 9 + 3{,}5 = 12{,}5$.

Аналогично, так как $\angle BCM = \angle MCD$ (*CM* – биссектриса $\angle BCD$) и $\angle BCM = \angle CMD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD), то $\angle MCD = \angle CMD$, значит $\triangle CMD$ - равнобедренный, при этом $CD = MD = MH + HD = 5 + x$.

В прямоугольном $\triangle CHD$ имеем $CD^2 = CH^2 + HD^2$ или

$(5+x)^2 = x^2 + 144 \Rightarrow 10x = 119 \Rightarrow x = 11{,}9$. Тогда: $CD = MD = 5 + 11{,}9 = 16{,}9$.

Получаем: $AD = AM + MD = 12{,}5 + 16{,}9 = 29{,}4; BC = KH = 5 + 9 = 14.$

Теперь найдем площадь трапеции: $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CH = \dfrac{29{,}4 + 14}{2} \cdot 12 = 260{,}4$ (см^2).

Ответ: 260,4.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	15
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	10
В решении задачи верно выписаны одна-две формулы, являющиеся началом возможного решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	15

3. *(15 баллов)* Два повара для приготовления вишнёвого варенья смешали вишню и сахар, первый положил на две части вишни одну часть сахара, второй - на три части вишни две части сахара. Сколько килограммов каждой смеси нужно взять, чтобы получить 1,9 килограммов смеси, в которой на двенадцать частей вишни приходится семь частей сахара?

Решение.

	сахар	вишня
1 повар	x	$2x$
2 повар	$2y$	$3y$
новая смесь	$x+2y$	$2x+3y$

1. $\dfrac{x+2y}{2x+3y}=\dfrac{7}{12}$ $\Longleftrightarrow$ $12x+24y=14x+21y$, $\Longleftrightarrow$ $2x=3y$ $\Longleftrightarrow$ $x=1{,}5y$.

2. $x+2y+2x+3y=1{,}9$ $\Longleftrightarrow$ $3x+5y=1{,}9$ $\Longleftrightarrow$ $4{,}5y+5y=1{,}9$ $\Longleftrightarrow$ $9{,}5y=1{,}9$ $\Longleftrightarrow$ $y=0{,}2$ $\Longleftrightarrow$ $x=0{,}3$ $\Longleftrightarrow$ смеси 1-го повара надо взять: $3x$ - 0,9кг; смеси 2-го повара: $5y$ - 1кг.

Ответ: 1 повар - 0,9 кг, 2 повар - 1 кг.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	15
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.	10
Решено подбором значений переменных, удовлетворяющих условию задачи.	5
Наблюдаются отдельные шаги возможного решения.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	15

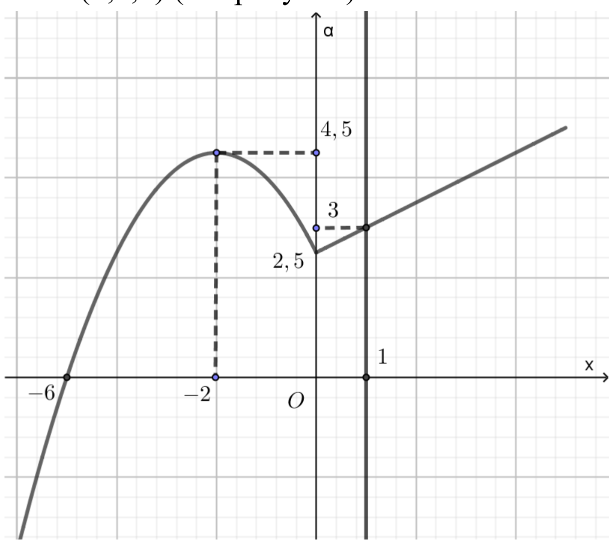
4. *(20 баллов)* Определите количество решений уравнения

$$a(x+|x|-2)=x^2+4x-5$$

в зависимости от значений параметра a.

Решение. Рассмотрим графическое решение задачи. Выразим a через x и построим график соответствия в осях (x; a) (данное соответствие не является функциональным). Раскроем модуль:

1) $x\geq 0$, $2a(x-1)=(x-1)(x+5)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ a=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$. Построим вертикальную прямую и луч с началом в точке с координатами (0;2,5) (см. рисунок).



2) $x<0$, $-2a=x^2+4x-5$, $a=-\dfrac{1}{2}(x^2+4x-5)$ - квадратный трёхчлен, график – часть параболы, соответствующая $x<0$. Построим его в тех же осях (см. рисунок). Координаты вершины параболы (-2;4,5). Графики соединяются в точке (0; 2,5). Луч $a=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{2}$ пересекает вертикальную прямую $x=1$ в точке с координатами (1;3). Количество решений уравнения при каждом значении

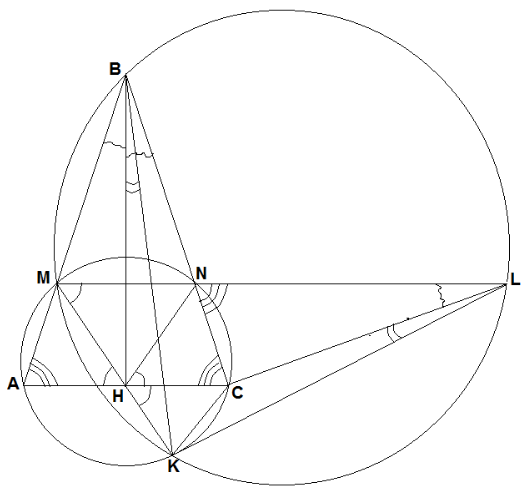
параметра соответствует количеству точек пересечения горизонтальной прямой $a = const$ и графика построенного соответствия. По графику выпишем ответ.

Ответ: $a \in (-\infty; 2,5)$ - два решения; $a = 2,5$ - три решения; $a \in (2,5; 3)$ - четыре решения; $a = 3$ - три решения; $a \in (3; 4,5)$ - четыре решения; $a = 4,5$ - три решения; $a \in (4,5; +\infty)$ - два решения.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	20
Ответ отличается от правильного одной – двумя точками (крайними или отдельными).	15
Ученик не заметил, что некоторые значения переменной являются решениями при любом значении параметра, остальное верно или получено только больше половины правильных результатов по какой-то причине (например, вершина параболы неправильно найдена) при правильном ходе решения.	10
Решение начато в правильном направлении (раскрыт модуль, делаются попытки исследования количества решений каждого уравнения), но не завершено или ответ неверен.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

5. *(20 баллов)* Окружность проходит через вершины A и C равнобедренного треугольника $ABC\left(AB = BC\right)$ и пересекает стороны AB и BC в точках M и N, соответственно. MK, хорда этой окружности, равная по длине $2\sqrt{5}$, содержит точку H, лежащую на AC и являющуюся основанием высоты треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку C и перпендикулярная BC, пересекает прямую MN в точке L. Найти радиус окружности, описанной около треугольника MKL, если $\cos\angle ABK = \dfrac{2}{3}$.

Решение.



Четырехугольник $AMNC$ - равнобедренная трапеция. $\Delta AMH = \Delta HNC$ - по двум сторонам и углу между ними.

$$\angle AHM = \angle HMN = \angle MNH = \angle NHC = \angle CHK = 180^0 - \angle NCK,$$

$$\angle MAC = \angle ACN = \angle NCA,$$
$$\angle KHB = \angle KHC + 90^0 = 180^0 - \angle NCK + 90^0 = \angle KCL,$$
$\angle AMK = \angle ACK = \angle HNC$ - как углы равных треугольников и как углы, опирающиеся на одну дугу. Следовательно, ΔHNC подобен ΔHCK и ΔBHC подобен ΔNLC по двум углам. $\dfrac{KC}{KH} = \dfrac{NC}{CH} = \dfrac{LC}{HB}$ и учитывая, что $\angle KHB = \angle KCL$, получаем подобие ΔKCL и ΔBHK $\Rightarrow \angle CLK = \angle HBK \Rightarrow \angle MBK = \angle MLK$, а значит точки K, M, B, L лежат на одной окружности и $R = \dfrac{MK}{2\sin\angle ABK} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}/3} = 3.$

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Задача решена верно.	20
Доказано, что точки K, M, B, L лежат на одной окружности.	17
Доказано подобие ΔKCL и ΔBHK.	15
Доказано, что ΔBHC подобен ΔNLC.	12
Доказано, что $\Delta AMH = \Delta HNC$ или ΔHNC подобен ΔHCK.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

6. *(20 баллов)* Существует ли натуральное число, квадрат которого равен сумме пяти попарно различных квадратов целых чисел, таких, что среди них есть число 7^2?

Решение. Покажем возможный способ построения искомого числа. Воспользуемся формулой $n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$. То есть,

$$7^2+24^2 = 25^2,\ 25^2+312^2=313^2,\ 313^2+48984^2 = 48985^2.$$

Следовательно, $48985^2=0^2+7^2+24^2+312^2+48984^2$.

Ответ: да, например, $48985^2=0^2+7^2+24^2+312^2+48984^2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном и обоснованном ходе решения имеется логическая ошибка или решение недостаточно обосновано.	14
Приведено начало возможного решения задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20