Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2020 г.

9 класс

Вариант № 3

1. *(10 баллов)* Решите неравенство: $\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}-\sqrt{3}}{x^2-16} \leq 0$.

2. *(15 баллов)* Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, имеющего равные диагонали, если длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны 13 и 7.

3. *(15 баллов)* В коробке 22 красных и 25 синих шарика. Их распределили по двум коробкам: в первой должно получиться 24 шарика, а во второй — 23. После распределения посчитали процент синих шариков в каждой коробке и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение синих шариков по коробкам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

4. *(20 баллов)* При каких значениях параметра a уравнение

$$(a+1)(|x-2{,}3|-1)^2-2(a-3)(|x-2{,}3|-1)+a-1=0$$

имеет ровно два различных решения?

5. *(20 баллов)* Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи DA и CB в точке F. Луч BA пересекает описанную вокруг треугольника DEF окружность в точке L, а луч BC пересекает ту же окружность в точке K. Длина отрезка LK равна 5, $\angle EBC = 15^0$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника EFK.

6. *(20 баллов)* Существуют ли пять попарно различных целых числа таких, что сумма любых четырех из них была бы квадратом натурального числа?

Решение варианта № 3

1. *(10 баллов)* Решите неравенство: $\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}-\sqrt{3}}{x^2-16} \leq 0$.

Решение.

ОДЗ исходного неравенства является D= $\{x \in [-3; 9] \setminus \{4\}\}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} - \sqrt{3}$ на промежутке $-3 \leq x \leq 0$.

Имеем $\sqrt{x+3} \geq 0$, $\sqrt[4]{9-x} \geq \sqrt[4]{9} = \sqrt{3} \Rightarrow$ $f(x) \geq 0$ для $x \in [-3; 0]$. (1)

Пусть x принадлежит промежутку $0 < x \leq 9$ $\Rightarrow \sqrt{x+3} > \sqrt{3}$ и $\sqrt[4]{9-x} \geq 0$ $\Rightarrow f(x) > 0$ для $x \in (0, 9]$. (2)

Из (1) и (2) следует, что если $f(x_0) = 0$, то $x_0 \in [-3; 0]$. (3)

Из (1) и (2) следует $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} - \sqrt{3} \geq 0$, $\forall x \in D$. (4)

Из (3) и (4), учитывая ОДЗ, следует, что решение исходного неравенства определяется следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} - \sqrt{3} \geq 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases} \\ \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} - \sqrt{3} = 0 \end{array}\right. \qquad (5)$$

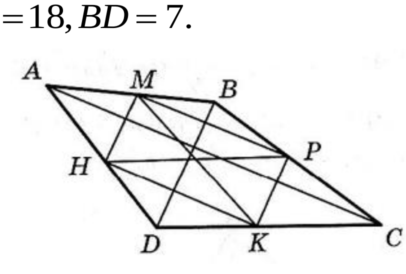
Из (4) следует, что решением системы из совокупности (5), является $x \in [-3; 4)$. Из (3) следует, что решением совокупности (5) является промежуток $[-3; 4)$.

Ответ: $[-3; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	10
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	8
С помощью верных рассуждений установлено, что числитель дроби неотрицательный, но отсутствует обоснованное завершение решения исходного неравенства.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	10

2. *(15 баллов)* Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, имеющего равные диагонали, если длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны 13 и 7.

Решение. Пусть MK и PH - отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём $MK = PH$, $AC = 18, BD = 7$.



Имеем: $MP \parallel AC$, $MP = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔABC);

$HK \parallel AC$, $HK = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔADC).

$\Rightarrow MP \parallel HK$, $MP = HK \Rightarrow MPKH$ - параллелограмм. А так как $MK = PH$, то четырёхугольник $MPKH$ - прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD данного четырёхугольника $ABCD$, поэтому $AC \perp BD$. Это означает, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 7 = 63$ (кв.ед.).

Ответ: 63.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	15
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	10
В решении задачи верно выписаны одна-две формулы, являющиеся началом возможного решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, описанных выше.	0
Максимальный балл	15

3. *(15 баллов)* В коробке 22 красных и 25 синих шарика. Их распределили по двум коробкам: в первой должно получиться 24 шарика, а во второй — 23. После распределения посчитали процент синих шариков в каждой коробке и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение синих шариков по коробкам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение.

Решение 1. Вместо суммарного процента будем считать суммарную долю синих шариков — очевидно, эти числа отличаются в 100 раз и достигают своего максимума одновременно. Каждый синий шарик в коробке из 24 штук составляет $1/24$ от общего числа шариков в этой коробке, а в коробке из 23 шариков $1/23$— от общего числа шариков. Значит, если поменять местами синие шарики из коробки с большим количеством шариков и красные шарики из коробки с меньшим количеством шариков, суммарный процент синих шариков в коробках вырастет. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда коробка с меньшим количеством шариков полностью состоит из синих шариков, а в коробке с большим количеством шариков — 2 синих шарика и 22 красных шарика.

Решение 2.

	Общее число шариков	Синие шарики	Доля в каждой коробке
1коробка	24 штуки	x	$x/24$
2коробка	23 штуки	25-x	$(25-x)/23$

Значит, суммарная доля синих шариков в двух коробке равна $\frac{x}{24} + \frac{25-x}{23} = -\frac{x}{24 \cdot 23} + \frac{25}{23} = -\frac{x}{552} + \frac{25}{23}$ и представляет собой линейную функцию с отрицательным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на левом конце промежутка [2; 24], то есть при x=2. Таким образом, в коробке с меньшим количеством шариков лежат только синие шарики, а в коробке с большим количеством шариков — 2 синих шарика и 22 красных шариков.

Ответ. Во второй коробке — 23 синих шарика, в первой — 2 синих шарика и 22 красных шариков.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	15
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.	10
Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.	5
Наблюдаются отдельные продвижения в решении.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	15

4. *(20 баллов)* При каких значениях параметра a уравнение

$$(a+1)(|x-2,3|-1)^2-2(a-3)(|x-2,3|-1)+a-1=0$$

имеет ровно два различных решения?

Решение. Обозначим $|x-2,3|-1=t$ (1), тогда исходное уравнение примет вид: $(a+1)t^2-2(a-3)t+a-1=0$ (2). Проанализируем уравнение (1): при $t<-1$ оно не имеет решений; при t = -1 – одно решение x = 2,3; каждому $t>-1$соответствует два различных значения x. Таким образом, исходное уравнение может иметь от нуля до четырёх решений. Оно имеет два различных корня в следующих трёх случаях для уравнения (2):

1) линейный случай, если единственный корень больше (-1);

2) $D=0; t_в>-1$;

3) уравнение (2) имеет два различных корня, один из которых больше (-1), а другой меньше (-1). Случай, когда один корень больше (-1), а другой равен (-1) нам не подходит, так как при этом будет три решения. Исследуем перечисленные выше случаи. 1) $a=-1$; $8t-2=0$; $t=\frac{1}{4}>-1$ - следовательно, данное значение параметра включается в ответ.

2) $\frac{D}{4}=(a-3)^2-(a+1)(a-1)=10-6a=0$; $a=\frac{5}{3}$. Единственный корень - $t_в=\frac{a-3}{a+1}$;

$$t_в\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{\frac{5}{3}-3}{\frac{5}{3}+1}=-\frac{1}{2}>-1,\ a=\frac{5}{3}$$ включаем в ответ.

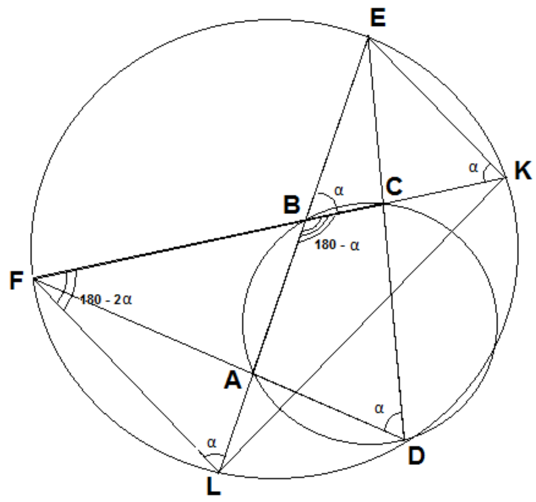
3) Общий случай – корни находятся по разные стороны от (-1) – описывается неравенством $(a+1)f(-1)<0$; $f(-1)=4a-6$; $(a+1)(4a-6)<0$; $a\in(-1;\frac{3}{2})$. Возможно решение через теорему Виета.

Ответ: $[-1;\frac{3}{2})\cup\{\frac{5}{3}\}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном ходе решения ответ отличается от правильного одной точкой или правильный ответ недостаточно обоснован.	15
Сделана замена переменной и на новую переменную определены правильные ограничения. Делаются попытки выписать какие-то ограничения для коэффициентов в связи с условиями на новую переменную, но они правильны только частично.	10
Сделана замена переменной, задача сведена к исследованию квадратного трёхчлена с параметром, но рассуждения ограничиваются рассмотрением дискриминанта.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

5. *(20 баллов)* Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи DA и CB в точке F. Луч BA пересекает описанную вокруг треугольника DEF окружность в точке L, а луч BC пересекает ту же окружность в точке K. Длина отрезка LK равна 5, $\angle EBC = 15^0$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника EFK.

Решение.



$\angle FLE = \angle FDE = \angle FKE = \alpha$, так как углы опираются на дугу FE.
$\angle EBK = \angle FDE = \alpha$, так как четырехугольник $ABCD$ вписанный.
ΔBLF равнобедренный, так как $\angle FLB = \angle FBL = \angle EBK = \alpha$.

Тогда $\angle BFL = 180 - 2\alpha \Rightarrow \sin\angle BFL = \sin 2\alpha = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$. $2R = \dfrac{LK}{\sin\angle LFK} = 10 \Rightarrow R = 5$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
Доказано, что ΔBLF равнобедренный.	15
Доказано, что $\angle EBK = \angle FDE = \alpha$.	10
Доказано , что $\angle FLE = \angle FDE = \angle FKE = \alpha$.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

6. *(20 баллов)* Существуют ли пять попарно различных целых числа таких, что сумма любых четырех из них была бы квадратом натурального числа?

Решение. Покажем способ построения искомой последовательности. Рассмотрим первые пять квадратов: 1, 4, 9, 16, 25 (можно брать любые пять разных).
Тогда первое число – это $1+4+9+16+25-4\cdot25=-45$, второе – это $1+4+9+16+25-4\cdot16=-9$, третье – это $1+4+9+16+25-4\cdot9=19$, четвертое – это $1+4+9+16+25-4\cdot4=39$, а пятое – это $1+4+9+16+25-4\cdot1=51$. Действительно, если сложить любые четыре из них, то в сумме получится один из пяти исходных квадратов, умноженный на 4, что удовлетворяет условию задачи.
Ответ: да, например, -45, -9, 19, 39, 51.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном и обоснованном ходе решения имеется логическая ошибка или решение недостаточно обосновано.	14
Приведено начало возможного решения задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20