

Второй (очный) этап академического соревнования
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету
«Математика», весна 2020 г.

8 класс

Вариант № 5

1. (10 баллов). В одном из районов планеты изучалась сейсмическая активность. 80 процентов всех дней было тихо. Предсказания приборов обещали спокойную обстановку в 64 случаях из ста; причем в 70 процентах всех случаев, когда день был спокойным, прогнозы приборов сбылись. Сколько процентов среди дней с повышенной сейсмоактивностью составляют те, в которых прогнозы не совпали с реальностью?

2. (15 баллов) Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} y^2 + xy = 15 \\ x^2 + xy = 10 \end{cases}$$

3. (15 баллов) В треугольнике PQR медиана PA и биссектриса QB (A и B – точки их пересечения с соответствующими сторонами треугольника) пересекаются в точке O . Известно, что $3PQ = 5QR$. Найдите отношение площади треугольника PQR к площади треугольника PQO .

4. (20 баллов) При каких значениях параметра a уравнение
$$\frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{ax^2 - 7x^2 - 10ax + 70x + 21a - 147} = 0$$
 имеет три решения?

5. (20 баллов) Четырехугольник, соединяющий середины сторон трапеции $ABCD$, является ромбом. Найдите его площадь, если высота трапеции $VH=5$ см, меньшее основание $BC=6$ см, а угол ABC равен 120° .

6. (20 баллов) Средняя продолжительность жизни в стране Гондор составляет 64 года. А средняя продолжительность жизни в стране Нуменор составляет 92 года. Средняя продолжительность жизни в двух этих странах 85 лет.

Во сколько раз отличается население Гондора от населения Нуменора?

Решение варианта № 5

1. (10 баллов) В одном из районов планеты изучалась сейсмическая активность. 80 процентов всех дней было тихо. Предсказания приборов обещали спокойную обстановку в 64 случаях из ста; причем в 70 процентах всех случаев, когда день был спокойным, прогнозы приборов сбылись. Сколько процентов среди дней с повышенной сейсмоактивностью составляют те, в которых прогнозы не совпали с реальностью?

Решение. Пусть всего наблюдаемых дней было x . Реально тихих дней было $0,8x$, сейсмически активных $0,2x$. Предсказания тихих дней совпали с действительно тихими днями: $0,7 \cdot 0,8x = 0,56x$. Тогда активных дней, которые не совпали с прогнозами, было

$$0,64x - 0,56x = 0,08x \text{ и } \frac{0,08x}{0,2x} \cdot 100\% = 40\%$$

Ответ: 40%

Критерии

Баллы	Условия выставления
10 баллов	Полное обоснованное решение
5 баллов	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение
0 баллов	Неверные рассуждения или записан только ответ.

2. (15 баллов) Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} y^2 + xy = 15 \\ x^2 + xy = 10 \end{cases}$$

Решение: Сложив уравнения, получим: $(x + y)^2 = 25$ или $x + y = \pm 5$.

Следовательно, система уравнений распадается на две:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 + x(5 - x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ 5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ x^2 + xy = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 - x \\ x^2 + x(-5 - x) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 - x \\ -5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

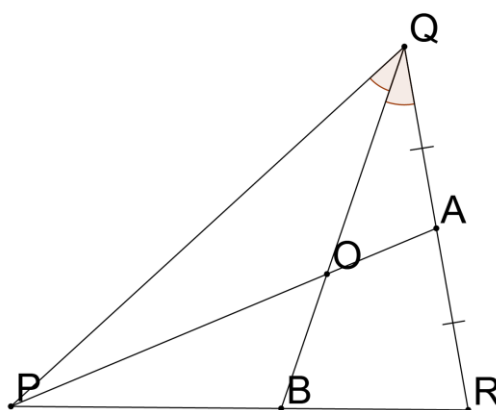
Ответ: $(2; 3)$, $(-2; -3)$.

Критерии

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

3. (15 баллов) В треугольнике PQR медиана PA и биссектриса QB (A и B – точки их пересечения с соответствующими сторонами треугольника) пересекаются в точке O . Известно, что $3PQ = 5QR$. Найдите отношение площади треугольника PQR к площади треугольника PQO .

Решение:



Из равенства $3PQ = 5QR$ и того, что PA медиана следует, что $PQ = 10x$, $QA = AR = 3x$, где x – коэффициент пропорциональности. По свойству биссектрисы $\frac{PO}{OA} = \frac{PQ}{QA} = \frac{10}{3}$. По теореме об

отношении площадей треугольников имеющих одинаковую высоту $\frac{S_{PQO}}{S_{QOA}} = \frac{PO}{OA} = \frac{10}{3}$. Учитывая,

что медиана PA делит площадь треугольника PQR на две равновеликие части, получаем

$$\frac{S_{PQR}}{S_{PQO}} = \frac{26}{10} = 2,6.$$

Ответ: 2,6.

Критерии

Баллы	Условия выставления
15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Правильно найдено отношение площадей треугольников PQO и QOA , но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
5 баллов	Правильно найдено как точка O делит отрезок PA , но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
0 баллов	Решение не соответствует перечисленным выше критериям

4. (20 баллов) При каких значениях параметра a уравнение $\frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{ax^2 - 7x^2 - 10ax + 70x + 21a - 147} = 0$ имеет три решения?

Решение.

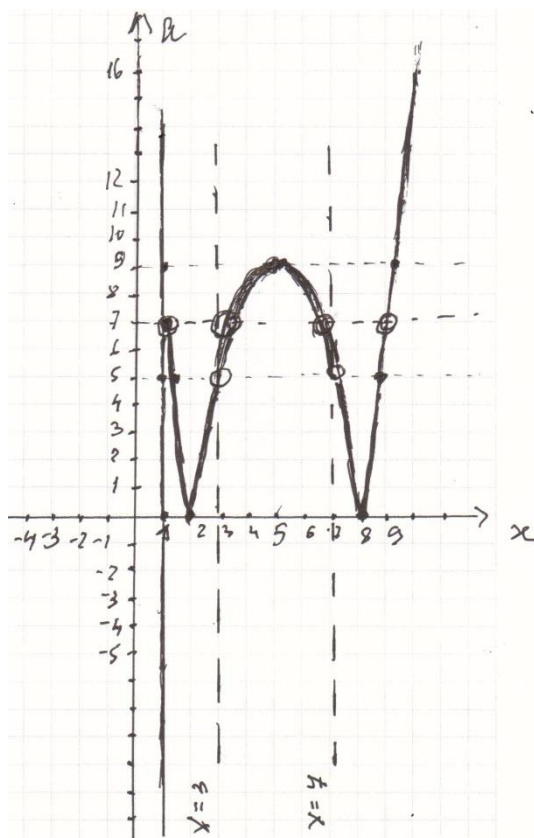
$$\begin{aligned} \text{Преобразуем } \frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{ax^2 - 7x^2 - 10ax + 70x + 21a - 147} &= \\ = \frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{x^2(a-7) - 10x(a-7) + 21(a-7)} &= \\ = \frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{(a-7)(x-7)(x-3)} & \end{aligned}$$

Решим графически уравнение

$$\frac{\sqrt{x-1} \cdot (|x^2 - 10x + 16| - a)}{(a-7)(x-7)(x-3)} = 0 \text{ в системе } xOa.$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ a = |x^2 - 10x + 16| \\ x \geq 1 \\ x \neq 7, x \neq 3, a \neq 7 \end{cases}$$

Ответ: при $a = 0$, $a = 5$, $a = 9$ уравнение имеет три корня.

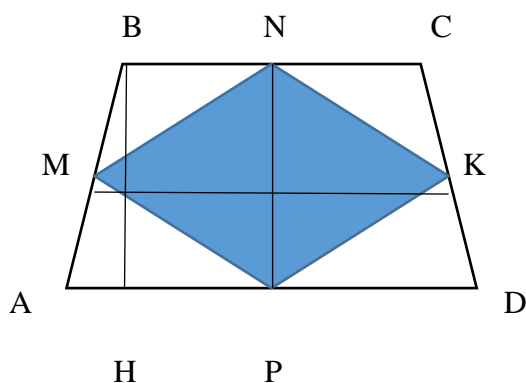


Критерии

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. (20 баллов) Четырехугольник, соединяющий середины сторон трапеции ABCD, является ромбом. Найдите его площадь, если высота трапеции $BH=5$ см, меньшее основание $BC=6$ см, а угол ABC равен 120° .

Решение.



1. Так как $MNKP$ – ромб, то $MN=NK$.
2. MN - средняя линия треугольника ABC , следовательно, $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$.
3. Аналогично доказывается, что $NK = \frac{1}{2} BD$.
4. Так как $MN=NK$, то $AC=BD$, тогда трапеция $ABCD$ – равнобедренная (по признаку равнобедренной трапеции).
5. Проведем MK и NP - диагонали ромба. По свойству диагоналей ромба $MK \perp NP$.

$$S_{MNKP} = \frac{1}{2} NP \cdot MK.$$
6. MK – средняя линия трапеции $ABCD$, следовательно, $MK \parallel AD$. $NP \perp MK$, $MK \parallel AD$, следовательно, $NP \perp AD$. Значит, NP – высота трапеции и $NP = CH = 5$.
7.
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BH \cdot (DA + CB) = NP \cdot MK = 2S_{MNKP}.$$

8. Треугольник ABH прямоугольный. $AH = \frac{BH}{\operatorname{tg} \angle BAD} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Тогда $AD = 2AH + CB = \frac{10\sqrt{3}}{3} + 6 = \frac{10\sqrt{3}+18}{3}$
9. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(6 + \frac{10\sqrt{3}+18}{3}\right) = \frac{180+50\sqrt{3}}{6}$, тогда $S_{MNKP} = \frac{90+25\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $\frac{90+25\sqrt{3}}{6}$.

Критерии

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Полное обоснованное решение.
15 баллов	Решение в целом верное, но недостаточно обоснованное (например, есть недочеты в доказательстве факта, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция) ИЛИ при верном ходе решения допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция, записана формула площади ромба. Дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

6. (20 баллов) Средняя продолжительность жизни в стране Гондор составляет 64 года. А средняя продолжительность жизни в стране Нуменор составляет 92 года. Средняя продолжительность жизни в двух этих странах 85 лет. Во сколько раз отличается население Гондора от населения Нуменора?

Решение:

Обозначим население Нуменора за n , а население Гондора за g , тогда:

$$64g + 92n = 85(g+n)$$

$$64g + 92n = 85g + 85n$$

$$7n = 21g$$

$$n = 3g$$

Ответ: население Гондора в 3 раза меньше

Критерии:

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Любое полное и обоснованное решение.
10 баллов	Решение в целом верное, но допущена арифметическая ошибка
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев или указан только ответ