Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2020 г.

8 класс

Вариант № 4

1. *(10 баллов)* Творческий конкурс в институт состоял из четырех заданий. Всего абитуриентов было 70 человек. Первое испытание успешно выдержали 35, второе 48, третье 64, четвертое 63 человека, при этом все 4 задания не выполнил никто. Прошедших и третье, и четвертое испытания зачислили в институт. Сколько было зачисленных?

2. *(15 баллов)* Пусть $f(x) = x^2 - 5x + 2020$. Решите уравнение $f(3-x) = f(3x-1)$.

3. *(15 баллов)* В выпуклом четырехугольнике *ABCD* *AB* = 10, *CD* = 15. Диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*, *AC* = 20, треугольники *AOD* и *BOC* имеют равные площади. Найдите *AO*.

4. *(20 баллов)* При каких значениях параметра а уравнение

$$\left|\frac{-4x^4-(6a+10)x^3+(16-4a)x^2-(6a^2-14a-40)x}{(4-x^2-a)(3a+2x+5)}\right| = \sqrt{a^2-2a+1}$$ имеет одно решение?

5. *(20 баллов)* В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle B = \angle D = 90°$, диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, а диагональ AC является биссектрисой углов A и C. Найдите углы A и C, если AC=2BD. Ответ дайте в градусах.

6. *(20 баллов)* Даны 10 натуральных чисел, сумма любых четырёх из них чётна. Может ли произведение всех десяти чисел оканчиваться на 1580? Ответ обоснуйте.

Решение варианта № 4

1. *(10 баллов)* Творческий конкурс в институт состоял из четырех заданий. Всего абитуриентов было 70 человек. Первое испытание успешно выдержали 35, второе 48, третье 64, четвертое 63 человека, при этом все 4 задания не выполнил никто. Прошедших и третье, и четвертое испытания зачислили в институт. Сколько было зачисленных?

Решение. 1-е и 2-е задания решили минимум 35+48-70=13 человек. 3-е и 4-е - минимум 64+63-70=57 человек. Все задания не сделал никто, значит, 1-е и 2-е осилили 13 человек, 3-е и 4-е – 57 человек.
Ответ: 57 человек.

Критерии.

Баллы	Условия выставления
10 баллов	Обоснованное решение
5 баллов	При обоснованном решении допущена арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0 баллов	Любая другая ситуация

2. *(15 баллов)* Пусть $f(x) = x^2 - 5x + 2020$. Решите уравнение $f(3-x) = f(3x-1)$

Решение: Пусть уравнение имеет вид $f(a) = f(b)$, получаем что:

$$a^2 - 5a + 2020 = b^2 - 5b + 2020$$

$$a^2 - b^2 - 5a + 5b = 0$$

$$(a-b)(a+b-5) = 0$$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, $a = b$ или $a + b = 5$.

$$\left[\begin{array}{l} a = b \\ a + b = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - x = 3x - 1 \\ 3 - x + 3x - 1 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1,5 \end{array}\right.$$

Ответ: {1,5 и 1}.

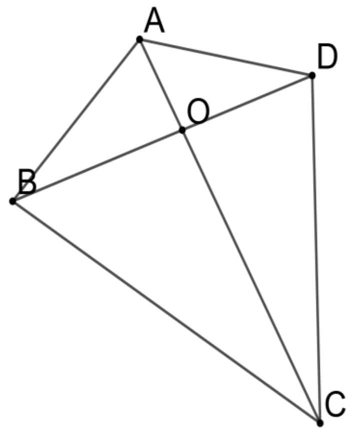
Критерии.

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

3. *(15 баллов)* В выпуклом четырехугольнике *ABCD* *AB* = 10, *CD* = 15. Диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*, *AC* = 20, треугольники *AOD* и *BOC* имеют равные площади. Найдите *AO*.

Решение:

Из равенства площадей треугольников *AOD* и *BOC* и равенства углов $\angle AOD = \angle BOC$ следует $\frac{AO \cdot OD}{BO \cdot OC} = 1$ (по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу). Откуда получаем, что $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$. При этом $\angle AOB = \angle DOC$ как вертикальные. Следовательно треугольники *AOB* и *COD* подобны. $\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OC} = \frac{2}{3}$, а значит $AO = 8$.



Ответ: 8.

Критерии:

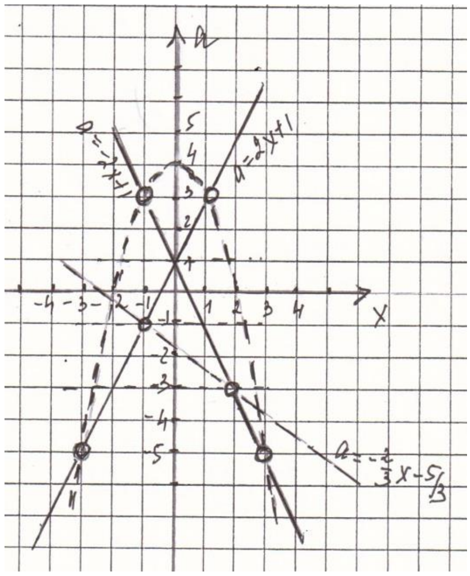
Баллы	Условия выставления
15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано подобие треугольников *AOB* и *COD*, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
5 баллов	Правильно применена теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
0 баллов	Решение не соответствует перечисленным выше критериям

4. *(20 баллов)* При каких значениях параметра а уравнение
$\left|\frac{-4x^4-(6a+10)x^3+(16-4a)x^2-(6a^2-14a-40)x}{(4-x^2-a)(3a+2x+5)}\right| = \sqrt{a^2-2a+1}$ имеет одно решение?

Решение

Преобразуем

$$\left|\frac{-4x^4-(6a+10)x^3+(16-4a)x^2-\left(6a^2-14a-40\right)x}{(4-x^2-a)(3a+2x+5)}\right| =$$
$$= \sqrt{a^2-2a+1}$$



$$\left|\frac{2x\left(-2x^3-(3a+5)x^2+(8-2a)x-(3a^2-7a-20)\right)}{12a-3ax^2-3a^2+8x-2x^3-2ax+20-5x^2-5a}\right| == \sqrt{(a-1)^2}$$

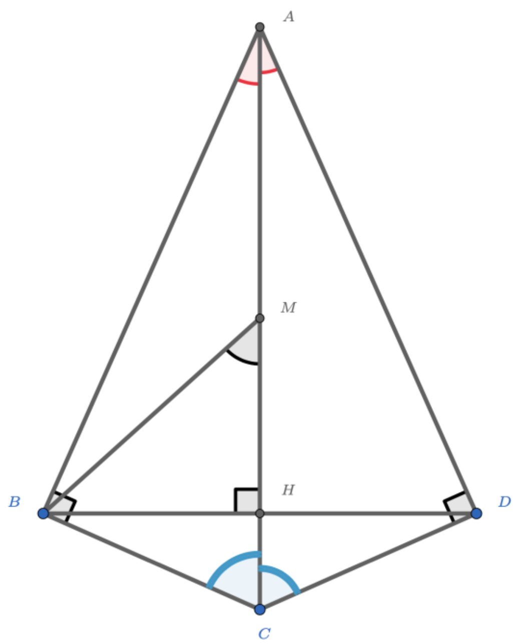
Решим графически уравнение $|2x| = |a-1|$, $a \neq 4-x^2,\ a \neq -\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$, в системе xOa.

То есть $\left[\begin{array}{l} a = 2x+1 \\ a = -2x+1 \end{array}\right.$, $a \neq 4-x^2,\ a \neq -\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$

Ответ: при $a = -3$, $a = -1$, $a = 1$.

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. *(20 баллов)* В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle B = \angle D = 90°$, диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, а диагональ AC является биссектрисой углов A и C. Найдите углы A и C, если AC=2BD. Ответ дайте в градусах.



Решение.

1. Пусть H – точка пересечения диагоналей четырехугольника ABCD. Рассмотрим треугольник BAD. AH – высота и биссектриса, следовательно, треугольник BAD равнобедренный. По признаку. Значит, BH=HD. По условию AC=2BD, тогда пусть $BH = x$, тогда $AC = 4x$.
2. Рассмотрим треугольник ABC – прямоугольный. Проведем медиану BM треугольника ABC. По свойству медианы $BM = AM = MC = \frac{1}{2}AC = 2x$.
3. Рассмотрим треугольник BMH. $BH = \frac{1}{2}BM$. Значит, по свойству катета прямоугольного треугольника $\angle BMH = 30°$.
4. Треугольник BMC равнобедренный, значит, $\angle MBC = \angle MCB = \frac{180°-30°}{2} = 75°$. Так как AC – биссектриса угла BCD, то $\angle ACD = \angle ACB = 75°$. Следовательно, $\angle BCD = 150°$.
5. В треугольнике ABC $\angle BAC = 90° - 75° = 15°$. AC – биссектриса угла BAD, значит, $\angle BAD = 30°$.

Ответ: $\angle BCD = 150°$; $\angle BAD = 30°$

Баллы	**Условия выставления**
20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	Решение верное, но недостаточно обосновано. Или решение верное, но ответ записан не в градусах (через обратные тригонометрические функции)
10 баллов	В решении использовано свойство медианы, свойство угла 30^0, но дальнейшее решение отсутствует или неверно. ИЛИ верно найден один из углов четырехугольника с использованием тригонометрии.
0 баллов.	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

6. *(20 баллов)* Даны 10 натуральных чисел, сумма любых четырёх из них чётна. Может ли произведение всех десяти чисел оканчиваться на 1580? Ответ обоснуйте.

Решение:
Очевидно, что чётность всех чисел одинакова. В противном случае, если есть числа с разной чётностью, то чисел хотя бы одной из этих чётностей хотя бы 3 (по принципу Дирихле), в таком случае, мы можем взять эти 3 числа и 1 число другой четности, и сумма этих четырех числе не будет чётной. Но если все они нечётные, то произведение нечётно, а если чётные, то делится на 2^{10}. Однако число, которое кончается на 1580, делится на 4, но не делится на 8.
Ответ: нет

Критерии:

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Любое полное и верное решение
15 баллов	Показано, что произведение должно делиться на 2^{10}
10 баллов	Описано, что все числа имеют одинаковую чётность, но дальнейших продвижений нет
5 баллов	Описано, что все числа имеют одинаковую чётность, но дальнейших продвижений нет
0 баллов.	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше или написан только ответ.