Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по общеобразовательному предмету «Математика», весна 2020 г.

11 класс

Вариант № 13

1. Цех выпускает трансформаторы видов А и В. На один трансформатор вида А расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на трансформатор вида В – 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации трансформатора вида А прибыль составляет 12 тысяч рублей, вида В – 10 тысяч рублей. Сменный фонд железа составляет 481 кг, проволоки – 301 кг. Сколько трансформаторов видов А и В нужно выпускать за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? Чему будет равна при этом наибольшая прибыль? (12 баллов)

2. Решите неравенство $(5-\cos 2(x+y)+4\sin(x+y))\log_2(3^x+3^{-x})\leq 2.$ (12 баллов)

3. Петя задумал пять чисел. На доске он написал их попарные суммы: 7, 9, 12, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 29. Какие числа задумал Петя? (16 баллов)

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса $AD.$ Известно, что центры вписанной в треугольник ABD и описанной около треугольника ABC совпадают. Найдите площадь треугольника $ABC,$ если $CD=4.$ Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра b, при котором для любого значения параметра $a\in[-1;2]$ неравенство $\operatorname{tg}^2 x+4(a+b)\operatorname{tg} x+a^2+b^2-18<0$ выполняется при каждом $x\in[-\pi/4;\pi/4]$. (20 баллов)

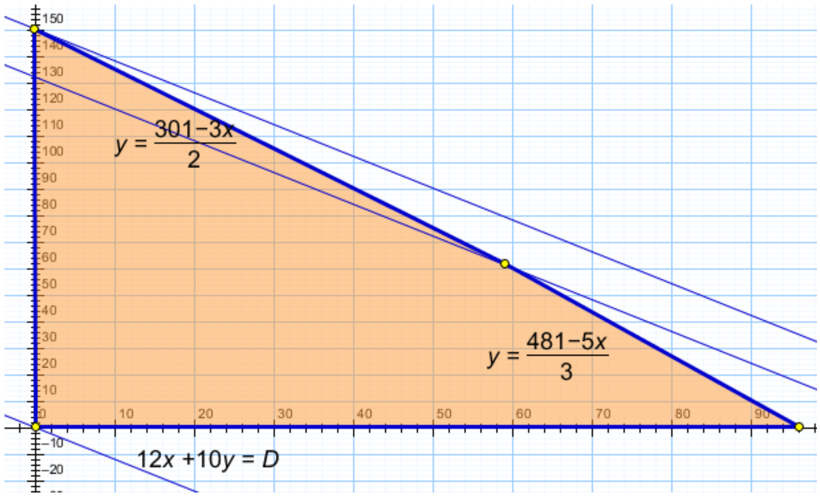
6. Основанием пирамиды $TABCD$ является ромб $ABCD$. Высота пирамиды TK равна 5, точка K лежит на прямой, содержащей диагональ основания AC, причем KC = KA + AC. Боковое ребро TC равно $6\sqrt{5}$, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами $30°$ и $60°$. Найдите длину стороны основания и угол между стороной основания AB и боковой гранью TBC. (20 баллов)

Решение варианта №13

1. Цех выпускает трансформаторы видов *A* и *B*. На один трансформатор вида *A* расходуется 5 *кг* трансформаторного железа и 3 *кг* проволоки, а на трансформатор вида *B* – 3 *кг* железа и 2 *кг* проволоки. От реализации трансформатора вида *A* прибыль составляет 12 тысяч рублей, вида *B* – 10 тысяч рублей. Сменный фонд железа составляет 481 *кг*, проволоки – 301 *кг*. Сколько трансформаторов видов *A* и *B* нужно выпускать за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? Чему будет равна при этом наибольшая прибыль? (12 баллов)

Решение. Пусть *x* – количество трансформаторов вида *A*, *y* – количество трансформаторов вида *B*.

Тогда прибыль за смену вычисляется по формуле $D = 12x + 10y,$ причем



$5x + 3y \le 481, \quad 3x + 2y \le 301,$ *x* и *y* – целые неотрицательные числа.

$5x + 3y \le 481 \;\Leftrightarrow\; y \le 160\frac{1}{3} - \frac{5x}{3}, \quad 3x + 2y \le 301 \;\Leftrightarrow\; y \le 150{,}5 - \frac{3x}{2}.$ Точка пересечения прямых $5x + 3y = 481$ и $3x + 2y = 301$ есть точка с координатами $x = 59,\ y = 62.$ В этом случае $D = 12 \cdot 59 + 10 \cdot 62 = 1328,$ но при $x = 0,\ y = 150{,}5$ имеем максимальное значение функции $D = 12x + 10y$ при неотрицательных *x* и *y*, удовлетворяющим неравенствам $5x + 3y \le 481, \quad 3x + 2y \le 301.$ Это значение равно 1505. Поскольку *x* и *y* – целые числа, то при $x = 0,\ y = 150$ доход $D = 1500,$ при $x = 1,\ y \le 150{,}5 - 1{,}5, \quad y = 149, \quad D = 1502,$ при $x = 2,\ y \le 150{,}5 - 3, \quad y = 147, \quad D < 1502.$

Таким образом, максимальный доход равен 1502 тыс. рублей при условии выпуска одного трансформатора вида *A* и 149 трансформаторов вида *B*.

Ответ: 1 трансформатор вида *A* и 149 трансформаторов вида *B*, 1502 тыс. рублей.

2. Решите неравенство $(5-\cos 2(x+y)+4\sin(x+y))\log_2(3^x+3^{-x})\le 2.$ (12 баллов)

Решение. $(2+\sin^2(x+y)+2\sin(x+y))\log_2(3^x+3^{-x})\le 1,$

$(1+(\sin(x+y)+1)^2)\log_2(3^x+3^{-x})\le 1.$ Поскольку $1+(\sin(x+y)+1)^2\ge 1,\ 3^x+3^{-x}\ge 2,\quad \log_2(3^x+3^{-x})\ge 1$ для любых значений x и y, то $(2+\sin^2(x+y)+2\sin(x+y))\log_2(3^x+3^{-x})\ge 1,$ и неравенство $(2+\sin^2(x+y)+2\sin(x+y))\log_2(3^x+3^{-x})\le 1$ справедливо только для тех x и y, для которых

$$\begin{cases}\sin(x+y)=-1,\\ 3^x+3^{-x}=2,\end{cases}\quad \begin{cases}y=-\pi/2+2\pi n,\ n\in N,\\ x=0.\end{cases}$$

Ответ: $x=0,\ y=-\pi/2+2\pi n,\ n\in N$.

3. Петя задумал пять чисел. На доске он написал их попарные суммы: 7, 9, 12, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 29. Какие числа задумал Петя? (16 баллов)

Решение. Поскольку все суммы разные, все числа тоже разные. Упорядочим эти числа в порядке возрастания и обозначим следующим образом: $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$.

Тогда $x_1+x_2=7,\ x_1+x_3=9,\ x_3+x_5=22,\ x_4+x_5=29.$ Кроме того,

$4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=7+9+12+16+17+19+20+21+22+29,\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=34.$

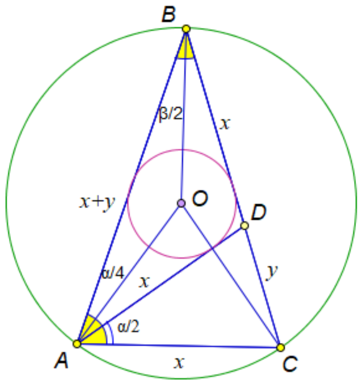
Решая систему, последовательно находим

$(x_1+x_2)+x_3+(x_4+x_5)=43,\ \ x_3=7,\ x_1=2,\ x_2=5,\ x_5=15,\ x_4=14.$

Ответ: 2, 5, 7, 14, 15.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Известно, что центры вписанной в треугольник ABD и описанной около треугольника ABC совпадают. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD=4$. Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним. (20 баллов)

Решение. Пусть $\angle A=\alpha,\ \ \angle B=\beta.$ Точка O – центр вписанной в треугольник ABD окружности. $\angle BAO=\alpha/4,\ \ \angle ABO=\beta/2.$ Поскольку O – центр описанной в около треугольника ABC окружности, то треугольник AOB равнобедренный, и $\angle BAO=\angle ABO,\ \beta=\alpha/2.$ Треугольники AOC и BOC равнобедренные, и $\angle ACO=3\alpha/4,\ \angle BCO=\alpha/4.$ Поскольку $\angle A+\angle B+\angle C=180°,$ то $\alpha+\alpha/2+3\alpha/4+\alpha/4=180°,$ и $\alpha=72°.$ Треугольник ABC равнобедренный, $\angle A=\angle C=72°,\ \ \angle B=36°.$



Пусть $AC=x,\ \ CD=y.$ Треугольники ABC и CAD подобны,

$$\frac{x}{y}=\frac{x+y}{x},\quad x^2-xy-y^2=0.$$

По условию $y=4,\ x=y(\sqrt{5}+1)/2=2(\sqrt{5}+1).$

Поскольку $\cos(\angle ABC)=\cos(\angle DAC)=\cos\beta,$ то по теореме косинусов для треугольника CAD имеем

$$\cos 2\beta=\frac{y}{2x}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\ \sin^2\beta=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{8},\ \sin(\angle ABC)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

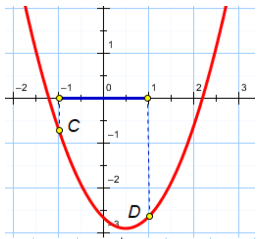
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(x+y)^2\sin(\angle ABC)=\frac{(2\sqrt{5}+6)^2}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=4(7+3\sqrt{5})\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=2\sqrt{130+58\sqrt{5}}.$$

Ответ: $2\sqrt{130+58\sqrt{5}}$.

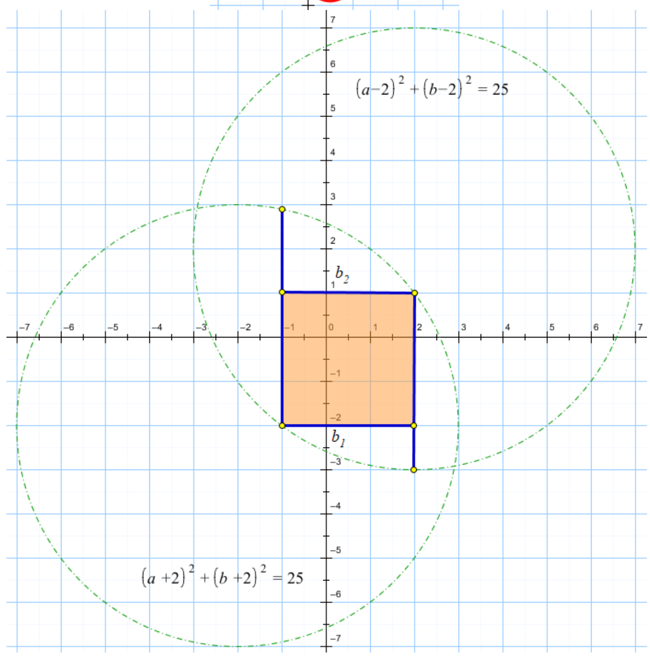
5. Найдите все значения параметра b, при котором для любого значения параметра $a \in [-1;\, 2]$ неравенство $\operatorname{tg}^2 x + 4(a+b)\operatorname{tg} x + a^2 + b^2 - 18 < 0$ выполняется при каждом $x \in [-\pi/4;\, \pi/4]$.

(20 баллов)

Решение. Сделаем замену $y = \operatorname{tg} x, \quad y \in [-1; 1]$. Получаем $y^2 + 4(a+b)y + a^2 + b^2 - 18 < 0.$ Рассмотрим функцию $f(y) = y^2 + 4(a+b)y + a^2 + b^2 - 18.$ Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вверх, вершиной в точке с абсциссой $y_0 = -2(a+b)$. Выясним, при каких значениях a и b неравенство $f(y) < 0$ выполняется для любого $y \in [-1; 1]$.



$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (a-2)^2 + (b-2)^2 < 25, \\ (a+2)^2 + (b+2)^2 < 25. \end{cases}$$



На координатной плоскости Oab изобразим множество точек $(a; b)$, удовлетворяющих этим условиям. Получаем пересечение двух кругов радиуса 5 без границы.

Для решения задачи необходимо найти такие значения b, при которых точки $(a; b)$ попадают в получившуюся область для любых $a \in [-1;\, 2]$.

Такие значения b образуют интервал $(b_1; b_2)$. Нижнюю границу b_1 находим, подставляя $a = -1$ в уравнение окружности $(a-2)^2 + (b-2)^2 = 25$. Имеем $b_1 = -2$. Верхнюю границу b_2 находим, подставляя в уравнение окружности $(a+2)^2 + (b+2)^2 = 25$значение $a = 2$.

Имеем $b_2 = 1$.

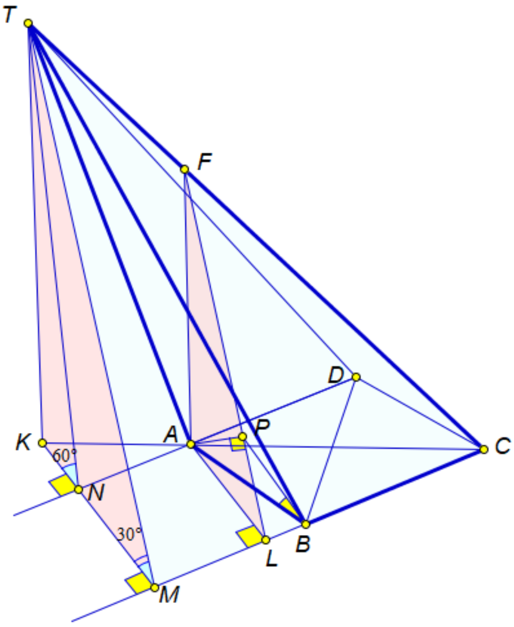
Ответ: $(-2; 1)$.

6. Основанием пирамиды $TABCD$ является ромб $ABCD$. Высота пирамиды TK равна 5, точка K лежит на прямой, содержащей диагональ основания AC, причем $KC = KA + AC$. Боковое ребро TC равно $6\sqrt{5}$, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами $30°$ и $60°$. Найдите длину стороны основания и угол между стороной основания AB и боковой гранью TBC.

(20 баллов)

Решение.

1) $\begin{array}{l} KN \perp AD,\ N = KN \cap AD, \\ KM \perp CB,\ M = KM \cap CB. \end{array}$ $KN = \dfrac{TK}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \dfrac{TK\sqrt{3}}{3}$,



$KM = \dfrac{TK}{\operatorname{tg} 30^\circ} = TK\sqrt{3}, \quad NM = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}TK.$

$KC = \sqrt{TC^2 - TK^2},$

$MC = \sqrt{KC^2 - KM^2} = \sqrt{TC^2 - 4TK^2}.$

2) $\angle ACB = \alpha,\ \sin\alpha = \dfrac{KM}{KC}, \quad \cos\alpha = \dfrac{MC}{KC},$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2KM \cdot MC}{KC^2}, \quad a = AB = \dfrac{MN}{\sin 2\alpha},$

$a = \dfrac{TK \cdot KC^2}{\sqrt{3}KM \cdot MC} = \dfrac{TC^2 - TK^2}{3\sqrt{TC^2 - 4TK^2}} = \dfrac{31\sqrt{5}}{12}.$

2) $AF \parallel TK, \quad F \in TC, \quad KA : AC = 1:2, \quad FA = \dfrac{2TK}{3}.$

$AL \perp MC, \quad L \in MC, \quad AL = MN = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}TK, \quad FL = \sqrt{FA^2 + AL^2} = \dfrac{4}{3}TK.$

$AP \perp FL, \quad AP \perp TBC,$ BP - проекция AB на плоскость TBC, угол ABP - искомый угол. $\angle ABP = \varphi,$

$\sin\varphi = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}TK}{3a} = \dfrac{4\sqrt{15}}{31}, \ \varphi = \arcsin\dfrac{4\sqrt{15}}{31}.$

Ответ: $\dfrac{31\sqrt{5}}{12}, \quad \arcsin\dfrac{4\sqrt{15}}{31}.$